

## CHƯƠNG V. ĐƯỜNG TRÒN

### Bài 13. MỞ ĐẦU VỀ ĐƯỜNG TRÒN

#### PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

##### I. Đường tròn

**Định nghĩa:** Đường tròn tâm  $O$  bán kính  $R$  ( $R > 0$ ),

kí hiệu là  $(O; R)$ , là hình gồm tất cả các điểm cách

điểm  $O$  một khoảng bằng  $R$ .

Kí hiệu  $(O; R)$  hoặc  $(O)$

$A$  là một điểm của đường tròn  $(O)$  thì ta viết  $A \in (O)$ .

Khi đó còn nói đường tròn  $(O)$  đi qua điểm  $A$  hay điểm  $A$

nằm trên đường tròn  $(O)$ .

Trên hình vẽ ta thấy:

- Điểm  $A$  nằm trên đường tròn  $(O)$ .
- Điểm  $C$  nằm trong đường tròn  $(O)$ .
- Điểm  $B$  nằm ngoài đường tròn  $(O)$ .

Tổng quát:

- Điểm  $M$  nằm trên đường tròn  $(O; R)$  nếu  $OM = R$ .
- Điểm  $M$  nằm trong đường tròn  $(O; R)$  nếu  $OM < R$ .
- Điểm  $M$  nằm ngoài đường tròn  $(O; R)$  nếu  $OM > R$ .

##### II. Tính đối xứng của đường tròn

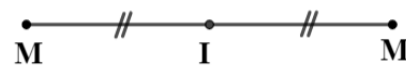
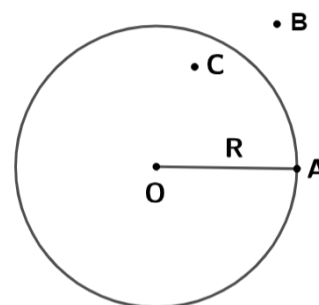
###### 1. Đối xứng tâm

Hai điểm  $M$  và  $M'$  gọi là đối xứng tâm với nhau qua điểm  $I$  (hay qua tâm  $I$ ) nếu  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $MM'$ .

###### 2. Đối xứng trục

Hai điểm  $M$  và  $M'$  gọi là đối xứng trục với nhau qua đường thẳng  $d$  (hay qua trục  $d$ ) nếu  $d$  là đường trung trực của đoạn  $MM'$ .

##### III. Tâm và trục đối xứng của đường tròn



- Đường tròn là hình có tâm đối xứng, tâm của đường tròn là tâm đối xứng của nó.
- Đường tròn là hình có trục đối xứng, mỗi đường thẳng qua tâm của đường tròn là một trục đối xứng của nó.
- Đường tròn có một tâm đối xứng, nhưng có vô số trục đối xứng.

## **PHẦN B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP**

### **I. Xác định điểm nằm trên, nằm trong, nằm ngoài đường tròn**

**Bài toán 1.** Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm

$M(0;2)$ ,  $N(0;-3)$  và  $P(2;-1)$ . Vẽ hình và cho biết trong các điểm đã cho, điểm nào nằm trên, điểm nào nằm trong, điểm nào nằm ngoài đường tròn  $(O;\sqrt{5})$ ? Vì sao?

**Hướng dẫn:** Dựng đường tròn tâm O, bán kính  $\sqrt{5}$  trên mặt phẳng toạ độ (xem hình vẽ bên).

Giả sử điểm  $A(2;1) \Rightarrow OA = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ .

#### **Lời giải**

(Xem hình vẽ).

\* Điểm  $M(0;2) \Rightarrow OM = 2$  và M thuộc Oy.

\* Điểm  $N(0;-3) \Rightarrow ON = 3$  và N thuộc Oy.

\* Điểm  $P(2;-1) \Rightarrow OP = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ .

Ta có:  $OM = 2 < \sqrt{5}$  nên M nằm trong đường tròn tâm O, bán kính  $\sqrt{5}$ .

$ON = 3 > \sqrt{5}$  nên N nằm ngoài  $(O;\sqrt{5})$

$OP = \sqrt{5}$  nên điểm P nằm trên  $(O;\sqrt{5})$ .

**Bài toán 2.** Cho đường tròn  $(O;R)$  và năm điểm M, N, P, Q, K (hình vẽ).

So sánh độ dài các đoạn thẳng OM, ON, OH, OK, OP với R.

#### **Lời giải**

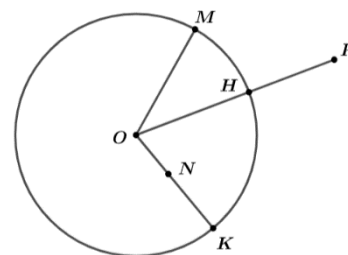
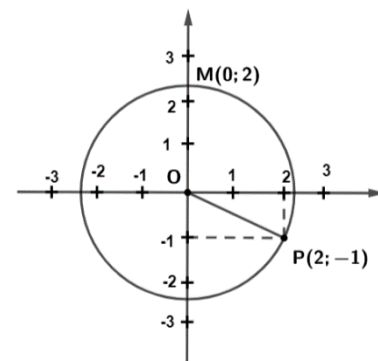
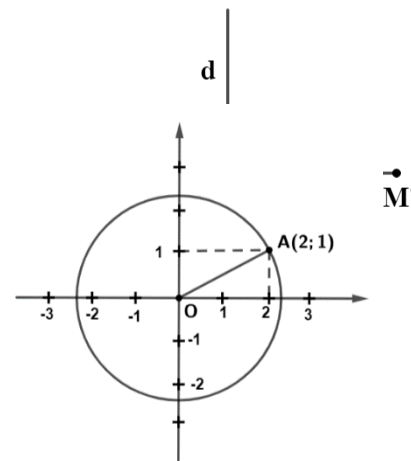
Ta có ba điểm M, H, K nằm trên đường tròn  $(O;R)$  nên  $OM = OH = OK = R$ .

Điểm N nằm bên trong  $(O;R)$  nên  $ON < R$

Điểm P nằm bên ngoài  $(O;R)$  nên  $OP > R$ .

**Bài toán 3.** Cho đường tròn (O), bán 5 cm và bốn điểm A, B, C, D thoả mãn  $OA = 3$  cm,

$OB = 4$  cm,  $OC = 7$  cm,  $OD = 5$  cm. Hãy cho biết mỗi điểm A, B, C, D nằm trên, nằm trong hay nằm ngoài đường tròn (O).



**Lời giải**

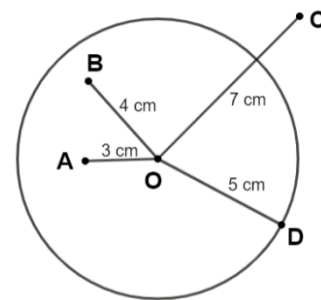
$OA = 3\text{ cm}$  ( $3 < 5$ ) nên điểm A nằm trong đường tròn  $(O; 5)$ .

$OB = 4\text{ cm}$  ( $4 < 5$ ) nên điểm B nằm trong đường tròn  $(O; 5)$ .

$OC = 7\text{ cm}$  ( $7 > 5$ ) nên điểm C nằm ngoài đường tròn  $(O; 5)$ .

$OD = 5\text{ cm}$  nên điểm D nằm trên đường tròn  $(O; 5)$  hay

$D \in (O; 5)$ .



## II. Chứng minh nhiều điểm cùng thuộc đường tròn

**Bài toán 4.** Cho tam giác ABC vuông tại A có  $AB = 3\text{ cm}$ ,  $AC = 4\text{ cm}$ . Chứng minh rằng các điểm A, B, C thuộc cùng một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

**Lời giải**

Xét tam giác ABC vuông tại A.

Theo định lý Pythagore, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5(\text{cm})$$

Gọi O là trung điểm của BC, ta có:

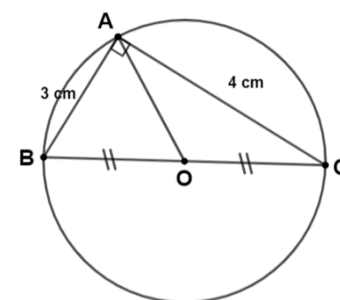
$$OB = OC = \frac{BC}{2} = \frac{5}{2} = 2,5(\text{cm})$$

Mặt khác OA là trung tuyến của tam giác ABC vuông tại A

Ta có  $OA = OB = OC = 2,5(\text{cm})$

Nên ba điểm A, B, C thuộc đường tròn tâm O là trung điểm đoạn BC và bán kính

$R = 2,5(\text{cm})$ .



**Bài toán 5.** Cho tam giác ABC đều có cạnh a, các đường cao BD và CE cắt nhau tại H.

Chứng minh rằng bốn điểm B, E, D, C cùng thuộc một đường tròn. Hãy xác định tâm và bán kính của đường tròn ấy.

Hướng dẫn: Chúng ta đưa về bài toán 1, ở đây có hai tam giác vuông cùng chung cạnh huyền BC.

**Lời giải**

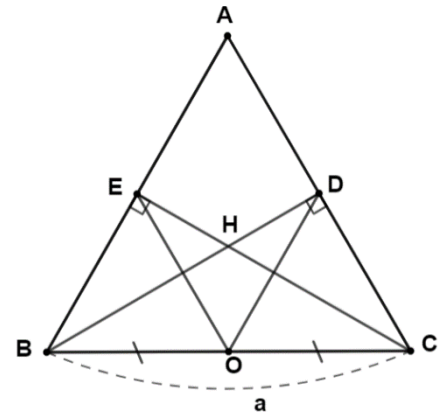
Gọi O là trung điểm của BC.

Các tam giác vuông BDC và BEC có chung cạnh huyền BC và OD, OE là các trung tuyến tương ứng

$$\text{Ta có } OD = OE \left( = \frac{1}{2} BC \right)$$

$$\Rightarrow OD = OE = OB = OC = \frac{1}{2} a.$$

Vậy bốn điểm B, E, D, C cùng thuộc đường tròn tâm O là trung điểm của BC và bán kính bằng  $\frac{a}{2}$ .



**Bài toán 6.** Cho hình chữ nhật ABCD có AD = 18cm và CD = 12cm. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

**Lời giải**

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD

Ta có: OA = OB = OC = OD (Tính chất hai đường chéo của hình chữ nhật) Vậy bốn điểm

A, B, C, D cùng thuộc đường tròn tâm O bán kính OA.

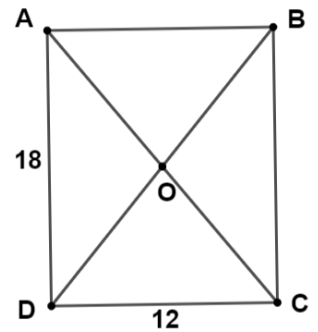
Xét tam giác vuông ADC vuông tại D.

Theo định lý Pythagore ta có:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 = 18^2 + 12^2$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{18^2 + 12^2} = 6\sqrt{13}(\text{cm})$$

Vậy bán kính của đường tròn (O) đi qua bốn điểm A, B, C, D là  $\frac{6\sqrt{13}}{2}$ .



**Bài toán 7.** Chứng minh rằng các trung điểm của các cạnh của hình thoi cùng nằm trên một đường tròn.

**Lời giải**

Gọi E, G, H, I lần lượt là trung điểm của bốn cạnh AB, BC, CD, DA của hình thoi và O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

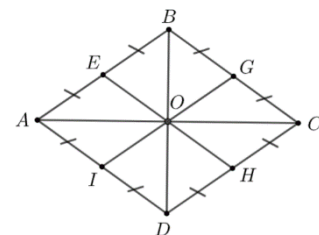
Ta có OE, OG, OH, OI lần lượt là các đường trung tuyến của các tam giác vuông ΔAOB, ΔBOC, ΔCOD, ΔDOA

$$\Rightarrow OE = \frac{1}{2} AB, OG = \frac{1}{2} BC, OH = \frac{1}{2} CD, OI = \frac{1}{2} AD$$

Mà AB = BC = CD = AD (cạnh hình thoi)

$$\Rightarrow OE = OG = OH = OI$$

Chứng tỏ bốn điểm E, G, H, I cùng thuộc đường tròn (O).



**Bài toán 8.** Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh AB lấy điểm M, trên cạnh AD lấy N sao cho

$AM = AN$ . Kẻ  $AH$  vuông góc với  $DM$  ( $H \in DM$ ) và  $AH$  cắt  $BC$  tại  $P$ . Chứng minh rằng năm điểm  $C, D, N, H, P$  cùng thuộc một đường tròn.

**Lời giải**

Ta có  $\widehat{A_1} = \widehat{D_1}$  (cùng phụ với  $\widehat{M_1}$ )

Do đó  $\triangle ABP = \triangle DAM$  (g.c.g)  $\Rightarrow BP = AM \Rightarrow PC = ND$ .

Lại có  $PC \parallel ND$  và  $\widehat{BCD} = 90^\circ$ (gt)

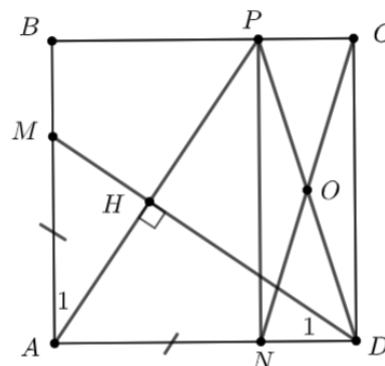
$\Rightarrow$  PCDN là hình chữ nhật. Gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo  $PD$  và  $CN$  ta có  $O$  là

tâm đường tròn đi qua bốn điểm  $P, C, D, N$ .

Mặt khác  $\triangle PHD$  vuông (gt) có  $HO$  là trung tuyến

$\Rightarrow HO = OP = OD$  hay  $H$  thuộc đường tròn tâm  $O$ .

Vậy năm điểm  $C, D, N, H, P$  cùng thuộc đường tròn ( $O$ ).



**Bài toán 9.** Tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Gọi M, N, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD và AD. Chứng minh rằng: Bốn điểm M, N, R, S cùng thuộc một đường tròn.

**Lời giải**

Ta có MN là đường trung bình của  $\triangle ABC$

$\Rightarrow MN \parallel AC$  và  $MN = \frac{AC}{2}$

tương tự  $SR \parallel AC$  và  $SR = \frac{AC}{2}$

Do đó MNRS là hình bình hành

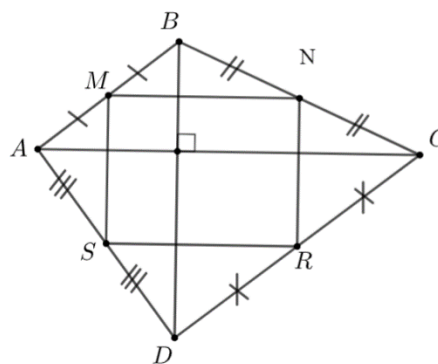
Mặt khác  $BD \perp AC$ (gt)  $\Rightarrow MN \perp BD$

Ta còn có  $MS \parallel NR \parallel BD$

Do đó  $MN \perp MS$  hay MNRS là hình chữ nhật

$\Rightarrow$  4 điểm M, N, R, S cùng thuộc đường tròn tâm O là giao điểm của hai đường chéo MR và

NS bán kính  $\frac{MR}{2}$ .



**Bài toán 10.** Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng các trung điểm của ba cạnh, các trung điểm của ba đoạn thẳng nối ba đỉnh với trực tâm chân của ba đường cao của tam giác cùng thuộc một đường tròn. (Đường tròn 9 điểm hay đường tròn Euler).

**Lời giải**

Gọi I, K, L lần lượt là trung điểm của ba cạnh AB, BC, AC

M, N, P lần lượt là trung điểm của HA, HB, HC

Chân ba đường cao kẻ từ A, B, C lần lượt là D, E, F.

Ta có IL là đường trung bình của  $\triangle ABC$

$$\Rightarrow IL \parallel BC \text{ và } IL = \frac{BC}{2}$$

$$\text{Tương tự } NP \parallel BC \text{ và } NP = \frac{BC}{2}$$

Do đó ILPN là hình bình hành.

Mặt khác  $AD \perp BC$  (gt)

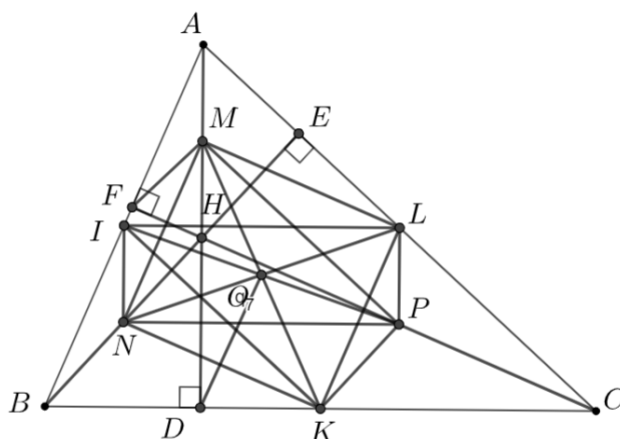
$$\Rightarrow IL \perp AD.$$

Ta còn có  $IN \parallel LP \parallel AD \Rightarrow IN \perp IL$

hay ILPN là hình chữ nhật.

Chứng minh tương tự KLMN cũng là hình chữ nhật, hai hình chữ nhật này có chung đường chéo NL. Nên NL, PI, MK cắt nhau tại một điểm O là trung điểm của NL.

Từ đó ta có 6 điểm M, L, P, K, N, I cùng nằm trên đường tròn đồng tâm O. Lại có  $\triangle MDK$  vuông tại D có DO là trung tuyến  $\Rightarrow OD = OM = OK$  hay D thuộc đường tròn đường kính MK. Chứng minh tương tự ta có hai điểm E, F cùng thuộc đường tròn O.



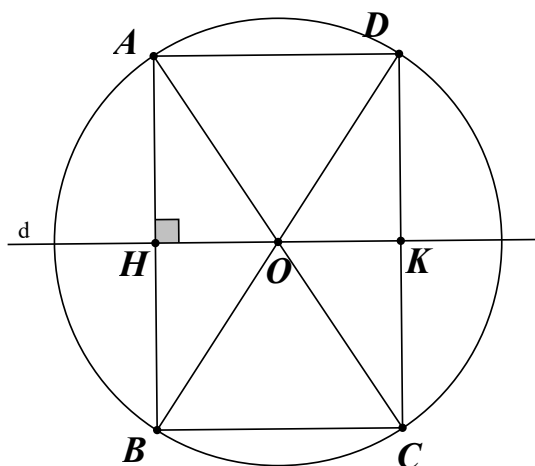
**Bài toán 11.** Cho đường tròn (O) đường thẳng d đi qua O và điểm A thuộc (O) nhưng không thuộc d. Gọi B là điểm đối xứng với A qua d; C và D lần lượt là điểm đối xứng với A và B qua O.

a) Ba điểm B, C và D có thuộc (O) không? Vì sao?

b) Chứng minh tứ giác ABCD là hình chữ nhật.

c) Chứng minh rằng C và D đối xứng với nhau qua d.

**Lời giải**



a) Xét tứ giác  $ABCD$  có hai đường chéo  $AC$  cắt  $BD$  tại  $(O)$ .

Ta có  $B$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $d$  nên  $d \perp AB$  tại  $H$  và  $HA = HB$ .

Xét tam giác  $AOB$  có đường cao  $OH$  đồng thời là đường trung tuyến (cmt) nên  $\triangle AOB$  cân tại  $OH \Rightarrow OB = OA$ .

$$A \in (O) \Rightarrow B \in (O)$$

Điểm  $C$  đối xứng với  $A$  qua  $O \Rightarrow OC = OA$ , tương tự  $OD = OB$ .

Đó đó  $OD = OC = OB = OA$  mà  $A \in (O) \Rightarrow B, C, D \in (O)$ .

b) Xét tứ giác  $ABCD$  có  $AC$  cắt  $BD$  tại  $O$  và  $OA = OB = OC = OD$  nên  $ABCD$  là hình bình hành (tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường)

Lại có  $AC = BD$  nên tứ giác  $ABCD$  là hình chữ nhật (hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau).

c) Tứ giác  $ABCD$  là hình chữ nhật (cmt)  $\Rightarrow CD \parallel AB$  mà  $AB \perp d$  (tính chất đối xứng qua một đường thẳng)  $\Rightarrow CD \perp d$ .

Tam giác  $COD$  cân tại  $O$  có  $OK$  là đường cao nên đồng thời là trung trực  $\Rightarrow DK = KC$ .

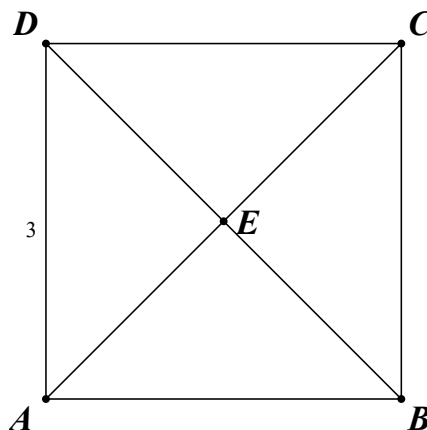
Ta có:  $\begin{cases} d \perp CD \\ DK = CK \end{cases}$  chứng tỏ  $C$  đối xứng với  $D$  qua  $d$ .

**Bài toán 12.** Cho hình vuông  $ABCD$  có  $E$  là giao điểm của hai đường chéo.

a) Chứng minh rằng có một đường tròn đi qua bốn điểm  $A, B, C$  và  $D$ . Xác định tâm đối xứng và chỉ ra hai trục đối xứng của đường tròn đó.

b) Tính bán kính của đường tròn ở câu a, biết rằng hình vuông có cạnh bằng  $3\text{ cm}$ .

**Lời giải**



a)  $E$  là giao điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  của hình vuông  $ABCD$ .

Nên  $EA = EB = EC = ED$ . Chứng tỏ 4 điểm  $A, B, C, D$  thuộc đường tròn tâm  $E$ .

Tâm đối xứng là điểm  $E$ .

Hai trục đối xứng là  $AC$  và  $BD$ .

b) Ta có:  $AC \perp BD$  (tính chất hai đường chéo của hình vuông)

Tam giác  $AEB$  vuông cân tại  $E$  có cạnh huyền  $AB = 3\text{ cm}$ .

Đặt  $EB = EA = R$ .

Theo định lí Pythagore ta có:  $AB^2 = R^2 + R^2 \Rightarrow AB^2 = 2R^2$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{AB^2}{2} \text{ hay } R^2 = \frac{3^2}{2} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

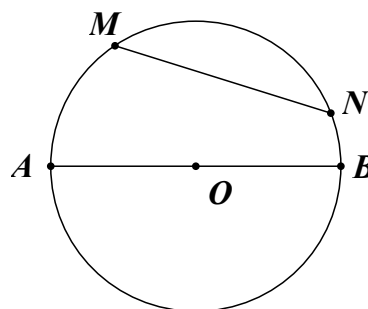
Vậy bán kính của đường tròn ở câu a là  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$  (  $cm$  ).

## Bài 14. CUNG VÀ DÂY CỦA MỘT ĐƯỜNG TRÒN

### PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

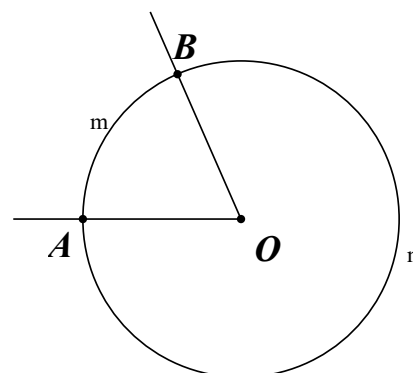
#### 1. Khái niệm dây và đường kính của đường tròn

- Đoạn thẳng nối hai điểm tùy ý của một đường tròn gọi là một dây (hay dây cung) của đường tròn  $CD$ .
  - Mỗi dây đi qua tâm là một đường kính của đường tròn  $AB$
  - \* Quan hệ giữa dây và đường kính
- Định lí: Trong một đường tròn, đường kính là dây cung lớn nhất.



#### 2. Góc ở tâm, cung và số đo của một cung

- Khái niệm góc ở tâm và cung tròn
- Cho hai điểm  $A$  và  $B$  cùng thuộc một đường tròn. Hai điểm ấy chia đường tròn thành hai phần, mỗi phần gọi là một cung tròn (hay cung). Hai điểm  $A$  và  $B$  là hai mút (hay đầu mút) của mỗi cung đó.
- Góc ở tâm là góc có đỉnh trùng với tâm của đường tròn.
- Kí hiệu  $\widehat{AmB}$  và  $\widehat{AnB}$  góc ở tâm  $\widehat{AOB}$ .



#### Chú ý:

- Khi góc  $AOB$  không bẹt thì cung nằm trong góc  $AOB$  gọi là cung nhỏ  $\widehat{AmB}$ . Kí hiệu  $\widehat{AB}$ .
- Cung còn lại,  $\widehat{AnB}$  gọi là cung lớn.
- Khi góc  $AOB$  bẹt thì mỗi cung  $AB$  được gọi là một nửa đường tròn.
- Ta còn nói góc  $AOB$  chắn cung  $AB$  hay cung  $AB$  bị chắn bởi góc  $AOB$ .
- Cách xác định số đo của một cung

Số đo của một cung được xác định như sau:

- Số đo của nửa đường tròn bằng  $180^\circ$ .
- Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.
- Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa  $360^\circ$  và số đo của cung nhỏ có chung hai mút.
- Số đo của cung  $AB$  được kí hiệu số  $\widehat{AB}$  (hình vẽ trên).

$$\text{sđ } \widehat{AmB} = \widehat{AOB} = \alpha, \text{ sđ } \widehat{AnB} = 360^\circ - \alpha$$

#### Chú ý:

- Cung có số đo  $n^\circ$  còn gọi là cung  $n^\circ$ , cả đường tròn được coi là cung  $360^\circ$ .
- Một điểm coi là cung  $0^\circ$ .
- Hai cung trên một đường tròn gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng số đo.

### PHẦN B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

## 1. Các bài toán về chứng minh

**Bài toán 1.** Cho nửa đường tròn đường kính  $AB$  và một điểm  $M$  tùy ý thuộc nửa đường tròn đó. Chứng minh rằng khoảng cách từ  $M$  đến  $AB$  không lớn hơn  $\frac{AB}{2}$ .

**Hướng dẫn:** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy với  $a, b \geq 0$ , ta có  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ .

### Lời giải

Gọi khoảng cách từ  $M$  đến  $AB$  là  $MH$  và bán kính đường tròn ( $O$ ) là  $R$ . Ta có

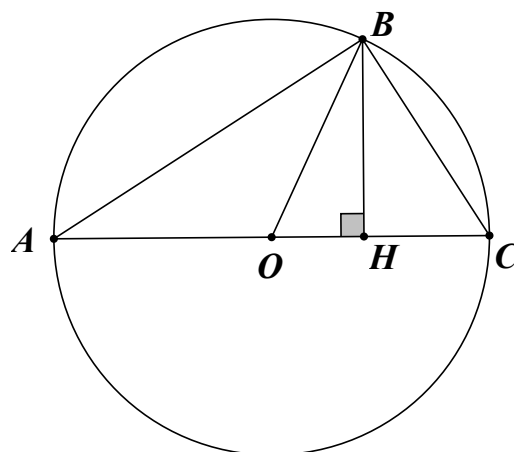
$$OM = OA = OB (= R).$$

Đó đó  $\triangle AMB$  vuông tại  $M$ .

$$\text{Ta có } \triangle MHA \sim \triangle BHM (g \cdot g) \Rightarrow \frac{MH}{HA} = \frac{BH}{HM}$$

$$\Rightarrow MH = \sqrt{HA \cdot HB} \leq \frac{HA + HB}{2} \leq \frac{AB}{2}$$

$$\Rightarrow MH^2 = HA \cdot HB \text{ (đpcm).}$$



**Bài toán 2.** Cho tam giác nhọn  $ABC$ . Đường tròn tâm  $O$  đường kính  $BC$  cắt các cạnh  $AB$  và  $AC$  lần lượt tại  $M$  và  $N$ . Chứng minh  $MN < BC$ .

### Lời giải

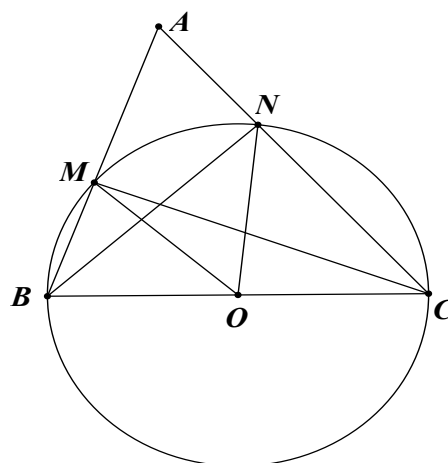
Dễ thấy các tam giác  $BMC$  và  $BNC$  đều là các tam giác vuông lần lượt tại  $M$  và  $N$  và  $OM, ON$  lần lượt là các trung tuyến.

Ta có  $OM = ON = OB = OC (= R, \text{ trong đó } R \text{ là bán kính đường tròn đường kính } BC)$

Xét tam giác  $MON$ , ta có  $MN < OM + ON$  (bất đẳng thức tam giác)

$$\text{Mà } OM + ON = OB + OC = BC$$

Vậy  $MN < BC$ .

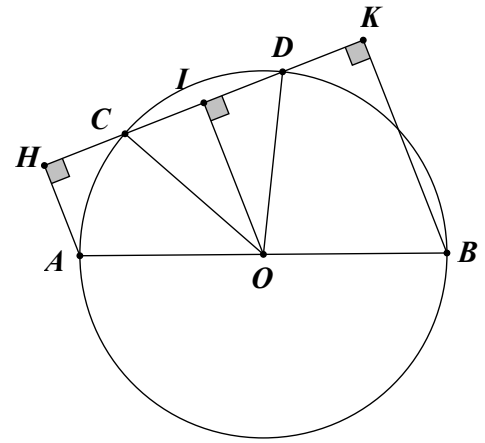


Ta có thể kết luận theo bài học: “Trong một đường tròn dây lớn nhất là đường kính”.

**Bài toán 3.** Cho đường tròn ( $O$ ) đường kính  $AB$ , dây  $CD$  không cắt đường kính  $AB$ . Gọi  $H$  và  $K$  theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ  $A$  và  $B$  đến  $CD$ . Chứng minh rằng  $CH = DK$ .

### Lời giải

Kẻ  $OI \perp CD$ , tam giác  $COD$  cân tại  $O$  nên đường cao  $OI$  đường tròn đường trung tuyến  $\Rightarrow IC = ID$ .  
Lại có  $AHKB$  là hình thang vuông.  
( $AH \parallel BK (\perp HK)$ ) mà  $OI$  là đường trung bình nên  $I$  là trung điểm của  $HK$  ta có  $IH = IK$   
 $\Rightarrow HI - CI = KI - ID$  hay  $CH = DK$



**Nhận xét:** Do  $HI = KI$  và  $IC = ID$  nên ta có  $HI + ID = IK + IC$  hay  $HD = KC$ . Ta có bài toán sau:

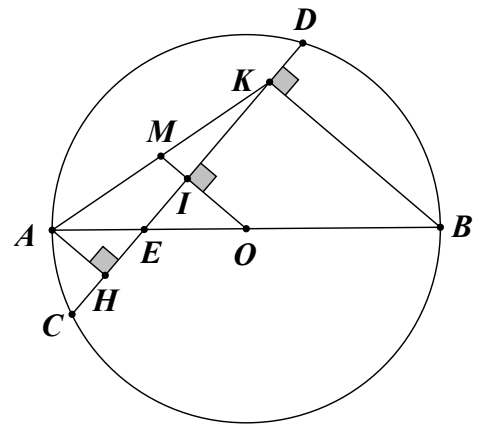
Cho đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ , dây  $CD$  không cắt đường kính  $AB$ . Gọi  $H, K$  theo thứ tự là chân các đường vuông góc hạ từ  $A, B$  đến  $CD$ . Chứng minh rằng  $HD = CK$  (Học sinh tự giải).

Trường hợp dây  $CD$  cắt đường kính  $AB$  đưa ta đến bài toán 4 sau đây.

**Bài toán 4.** Cho đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ , dây  $CD$  cắt đường kính  $AB$  tại  $E$ . Gọi  $H, K$  theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ  $A$  và  $B$  đến  $CD$ . Chứng minh rằng  $CH = DK$ .

#### Lời giải

Kẻ  $OI \perp CD$  ta có  $IC = ID$  ( tam giác  $COD$  cân tại  $O$  nên đường cao đồng thời là đường trung tuyến)  
 $OI \parallel KB$   
Gọi  $M$  là giao điểm của  $OI$  và  $AK$  ta có  $M$  là trung điểm của  $AK$ .  
Xét  $\triangle AKH$  có  $M$  là trung điểm của  $AK$   
 $MI \parallel AH$  ( vì cùng  $\perp CD$ )  
 $\Rightarrow I$  là trung điểm của  $HK$  hay  $IH = IK$  (2)  
Từ (1) và (2)  $\Rightarrow IC - IH = ID - IK$  hay  $CH = DK$



**Nhận xét:** Theo bài toán 1. Trên dây  $CD$  ta lấy thêm điểm  $M$ .

Khi đó  $OI \leq OM$ . Mà  $OM = \frac{AH + BK}{2}$  (tính chất đường trung bình của hình thang)

$\Rightarrow AH + BK \leq 2OM$ . Chúng ta sẽ có bài toán sau:

**Bài toán 5.** Cho đường tròn  $(O; R)$  đường kính  $AB$ .  $M$  là điểm cố định nằm trong đường tròn ( $M$  khác  $O$ ) và  $CD$  là dây cung quay quanh  $M$ . Gọi  $H, K$  lần lượt là hình chiếu của  $A$  và  $B$  lên  $CD$ . Xác định vị trí của dây  $CD$  để  $AH + BK$  lớn nhất.

**Hướng dẫn:** Kẻ  $OI \perp CD$ .

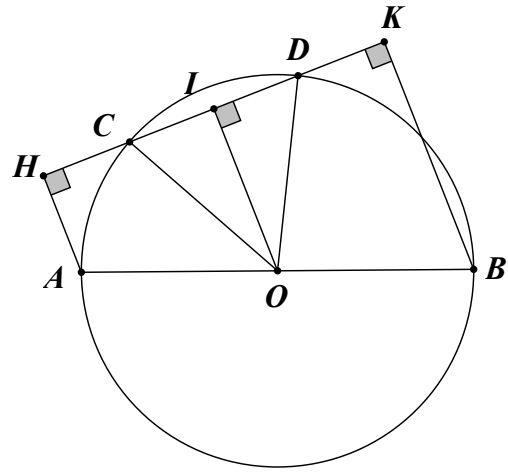
#### Lời giải

Ta có  $AH, BK$  cùng vuông góc với  $CD$   
 $\Rightarrow$  Tứ giác  $ABKH$  là hình thang và có  $OI$  là đường trung bình

$$OI = \frac{AH + BK}{2} \Rightarrow AH + BK = 2OI$$

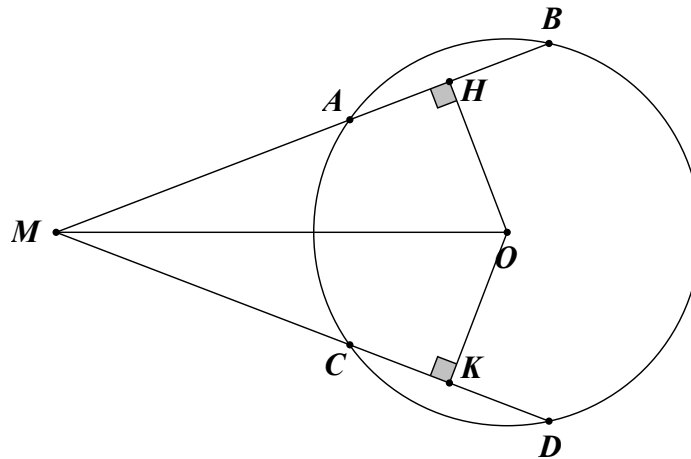
Ta có  $OI \leq OM$  (đường vuông góc ngắn hơn đường xiên)

Dấu "=" xảy ra khi  $OM \perp CD$



**Bài toán 6.** Cho đường tròn (O). Các dây  $AB$  và  $CD$  bằng nhau, các tia  $BA$  và  $DC$  cắt nhau tại điểm  $M$  nằm bên ngoài đường tròn. Gọi  $H, K$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Chứng minh rằng  $MA = MC$ .

**Lời giải**



Ta có  $AB = CD$  (gt)  $\Rightarrow OH = OK$  (liên hệ giữa dây và khoảng cách đến tâm)

Xét tam giác vuông  $MHO$  theo định lý Pythagore:  $MH^2 = MO^2 - OH^2$

Tương tự với  $\triangle MKO$ , ta có  $MK^2 = MO^2 - OK^2$  mà  $OH = OK \Rightarrow MH = MK$  (1)

Lại có  $OH \perp AB$  (gt)  $\Rightarrow HA = HB = \frac{AB}{2}$

Tương tự  $KC = KD = \frac{CD}{2}$  mà  $AB = CD$

$\Rightarrow HA = CK$  (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow MH - HA = MK - CK$

hay  $MA = MC$

**Nhận xét:** Trường hợp hai dây  $AB, CD$  không bằng nhau, chẳng hạn  $AB > CD$  ta có bài toán sau:

**Bài toán 7.** Cho đường tròn (O) hai dây AB và CD sao cho  $AB > CD$ . Các tia BA và DC cắt nhau tại M nằm bên ngoài đường tròn. Gọi H, K theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Hãy so sánh MH và MK.

**Hướng dẫn:** Ta có  $MH^2 = MO^2 - OH^2$  và  $MK^2 = MO^2 - OK^2$  mà  $OH < OK$  (vì  $AB > CD$ )  $\Rightarrow MH > MK$

**Nhận xét:** Trường hợp điểm M nằm bên trong đường tròn ta có bài toán tương tự.

**Bài toán 8.** Cho M là điểm nằm bên trong đường tròn (O), vẽ qua M, hai dây AB và CD sao cho  $AB > CD$ . Gọi H, K theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng:  $MH > MK$ .

**Lời giải**

Nối M với O.

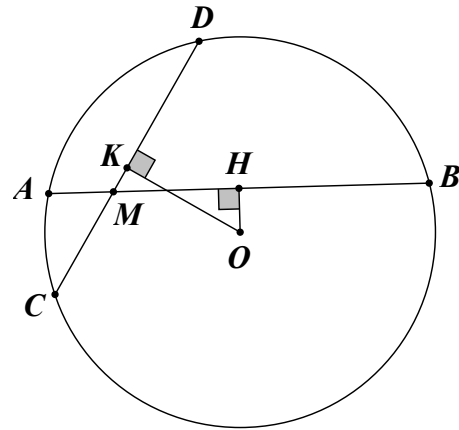
Xét tam giác vuông OHM có:

$$MH^2 = OM^2 - OH^2$$

Tương tự với tam giác vuông OKM có

$$MK^2 = OM^2 - OK^2$$

Mà  $AB > CD$  (gt)  $\Rightarrow OH < OK \Rightarrow MH > MK$



**Bài toán 9.** Từ điểm P nằm bên ngoài đường tròn (O; R) và  $OP = 2R$ . Một đường thẳng qua P cắt đường tròn (O) tại A và B (A nằm giữa B và P) và  $AB = R$ . Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O đến BP. Qua P kẻ một đường thẳng khác cắt đường tròn (O) tại C và D (C, D khác phía với AB so với OP). Kẻ  $OK \perp CD$ . So sánh AB và CD biết  $OK < \frac{R\sqrt{3}}{2}$ .

**Lời giải**

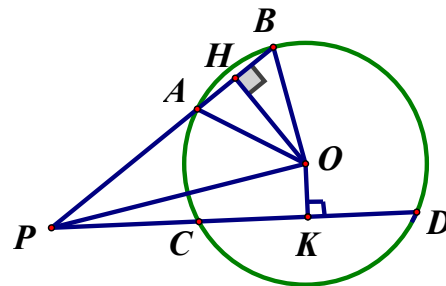
Ta có  $OH \perp BP$ . Tam giác AOB cân tại O nên đường cao OH đồng thời là đường trung tuyến H là trung điểm của AB:

$$HA = HB = \frac{AB}{2} = \frac{R}{2}.$$

Xét tam giác vuông AHO ta có:

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Mà  $OK < \frac{R\sqrt{3}}{2}$  (gt)  $\Rightarrow OK < OH \Rightarrow AB < CD$ .



**Bài toán 10.** Cho điểm A cố định ở bên trong đường tròn  $(O; R)$  và A không trùng với O. BC là dây cung quay quanh A. Xác định vị trí của dây cung BC lúc dây cung BC ngắn nhất.

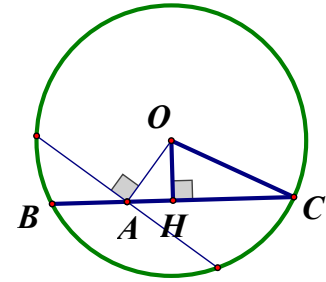
**Lời giải**

Kẻ  $OH \perp BC$  (H thuộc BC).

Ta có  $OH \leq OA$  (không đổi)

BC ngắn nhất  $\Leftrightarrow OH$  lớn nhất  $\Leftrightarrow OH = OA \Leftrightarrow H = A$ .

Vậy: Khi BC vuông góc với OA tại A thì độ dài dây BC ngắn nhất.



## II. Tính toán

**Bài toán 11.** Cho đường tròn  $(O; 5 \text{ cm})$  là một dây bất kì của đường tròn đó. Biết  $AB = 6 \text{ cm}$ .

- Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng AB.
- Tính  $\tan \alpha$  nếu góc ở tâm chắn cung AB bằng  $2\alpha$ .

**Lời giải**

a) Gọi khoảng cách từ O đến đường thẳng AB là OH

Tam giác AOB cân tại O nên đường cao OH

cũng đồng thời là đường trung tuyến hay

$$AH = BH = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3 (\text{ cm}).$$

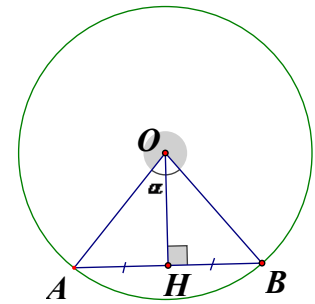
Xét tam giác AHO vuông tại H, theo định lý Pythagore, ta có:

$$OA^2 = AH^2 + OH^2 \Rightarrow OH^2 = OA^2 - AH^2 = 5^2 - 3^2$$

$$OH = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 (\text{ cm})$$

b) Khi  $\widehat{AOB} = 2\alpha \Rightarrow \widehat{AOH} = \widehat{BOH} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$  (vì tam giác AOB cân tại O nên đường cao OH đồng thời là đường phân giác).

Xét tam giác AHO vuông tại H, ta có:  $\tan \alpha = \frac{AH}{OH} = \frac{3}{4}$ .



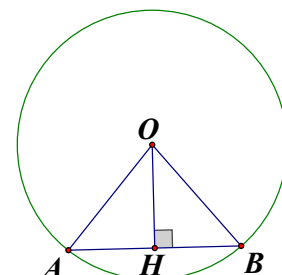
**Bài toán 12.** Tâm O của một đường tròn (cách dây AB của nó một khoảng 3 cm. Tính bán kính của đường tròn (O), biết rằng cung nhỏ AB có số đo bằng  $100^\circ$  (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

**Lời giải**

Ta biết rằng số đo cung nhỏ chính là số đo

của góc ở tâm hay  $\widehat{AOB} = 100^\circ$ .

Tam giác AOB cân tại O có OH là đường cao đồng thời cũng là đường phân giác.



$$\widehat{AOH} = \widehat{BOH} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ.$$

Tam giác AOH vuông tại H có cạnh góc vuông OH = 3 cm, góc nhọn  $\widehat{AOH} = 50^\circ$  (cmt).

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$OH = OA \cos \widehat{AOH} \Rightarrow OA = \frac{OH}{\cos 50^\circ} \approx 4,7.$$

Vậy bán kính của đường tròn (O) là 4,7 (cm).

**Bài toán 13.** Cho đường tròn (O; R) và một dây cung AB. Gọi I là trung điểm của AB. Tia OI cắt cung AB tại M.

a) Cho  $R = 5$  cm,  $AB = 6$  cm. Tính độ dài dây cung MA.

b) Cho MN là đường kính của đường tròn (O; R) biết  $AN = 10$  cm và dây  $AB = 12$  cm. Tính bán kính R.

**Lời giải**

a) Ta có I là trung điểm của dây AB (gt)

$$\Rightarrow IA = IB = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ (cm)} \text{ (định lý}$$

đường kính và dây cung)

Trong tam giác vuông AIO ta có:

$$OI = \sqrt{AO^2 - AI^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ (cm)} \text{ (định lý Pythagore)}$$

$$\Rightarrow IM = OM - OI = 5 - 4 = 1 \text{ (cm)}$$

Xét tam giác vuông AIM lại có:

$$AM = \sqrt{AI^2 + IM^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \text{ (cm)} \text{ (định lý Pythagore)}$$

b) Chứng minh như trên ta có:

$$IA = IB = \frac{AB}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ (cm)}$$

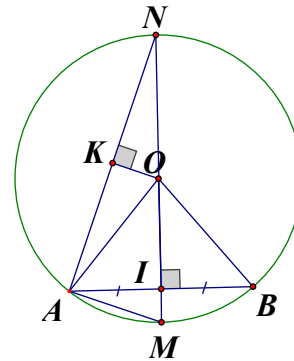
$$\text{Xét tam giác vuông AIN ta có: } NI = \sqrt{AN^2 - AI^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ (cm)}$$

$$\text{Kẻ } OK \perp AN \text{ ta có } KA = KN = \frac{AN}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ (cm)}$$

Và các tam giác vuông AIN và OKN đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{NO}{NA} = \frac{NK}{NI} \Rightarrow NO = \frac{NA \cdot NK}{NI} = \frac{10 \cdot 5}{8} = 6,25 \text{ (cm)}$$

$$\text{Vậy } R = 6,25 \text{ (cm)}$$



**Bài toán 14:** Cho đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB = 2R$ . Một dây  $CD$  không đi qua tâm  $O$  sao cho

$\widehat{COD} = 90^\circ$  và  $CD$  cắt đường thẳng  $AB$  tại  $E$  ( $D$  nằm giữa hai điểm  $E$  và  $C$ ), biết  $OE = 2R$ .  
Tính độ dài  $EC$  và  $ED$  theo  $R$

**Hướng dẫn:** Bạn hãy vẽ hình theo thứ tự sau:

Dựng  $(O; R)$

Vẽ hai bán kính  $OC \perp OD$

Nối  $CD$  kéo dài

Dựng  $(O; 2R)$

Lấy  $E$  là giao điểm của  $(O; 2R)$  và đường thẳng  $CD$

**Lời giải**

Ta có  $\widehat{COD} = 90^\circ$  (gt) nên  $\triangle COD$  vuông cân tại  $O$   
ta có:

$$CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}$$

Kẻ  $OH \perp CD$ , tam giác  $COD$  cân tại  $O$   
nên đường cao  $OH$  đồng thời là đường  
trung tuyến hay  $HC = HD$

$$\Rightarrow HC = HD = OH = \frac{CD}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

Xét tam giác vuông  $OHE$ , ta có:

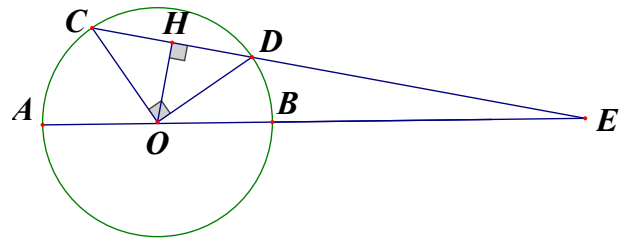
$$EH = \sqrt{OE^2 - OH^2} \quad (\text{định lý Pythagore})$$

$$EH = \sqrt{(2R)^2 - \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{14}}{2}$$

$$ED = EH - HD = \frac{R\sqrt{14}}{2} - \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{R\sqrt{14} - R\sqrt{2}}{2} = \frac{R\sqrt{2}(\sqrt{7} - 1)}{2}$$

$$EC = EH + HC = \frac{R\sqrt{14} + R\sqrt{2}}{2} = \frac{R\sqrt{2}(\sqrt{7} + 1)}{2}$$



**Bài toán 15.** Cho đường tròn  $(O; 10 \text{ cm})$  dây  $AB = 16 \text{ cm}$ .

a) Tính khoảng cách từ tâm  $O$  đến dây  $AB$ .

b) Lấy  $K$  thuộc dây  $AB$  sao cho  $AK = 14 \text{ cm}$ . Vẽ dây  $PQ$  vuông góc với  $AB$  tại  $K$ . Chứng tỏ  $AB = PQ$ .

**Lời giải**

a) Kẻ  $OH \perp AB$ , ta có:  $HA = HB = \frac{AB}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ (cm)}$

Xét tam giác vuông  $AOH$ , ta có

$$\begin{aligned} OH &= \sqrt{OA^2 - AH^2} \text{ (định lý Pythagore)} \\ &= \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \text{ (cm)}. \end{aligned}$$

b) Ta có:  $KB = AB - AK = 16 - 14 = 2 \text{ (cm)}$

Do  $HK = HB - KB = 8 - 2 = 6 \text{ (cm)}$

Kẻ  $OI \perp PQ$ , khi đó tứ giác  $OHKI$  là hình chữ nhật có hai cạnh kề

$OH = KI = 6 \text{ (cm)}$  nên là hình vuông.

Do đó:  $OH = OI = 6 \text{ (cm)}$ .

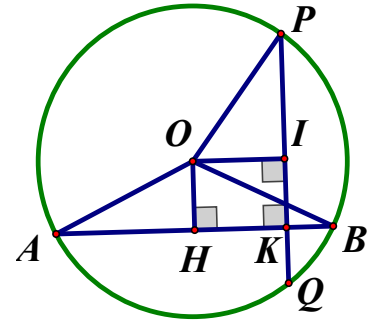
Tam giác  $OHB$  vuông tại  $H$ . Theo định lý Pythagore, ta có:

$$OB^2 = OH^2 + HB^2 \Rightarrow HB^2 = OB^2 - OH^2 \Rightarrow HB = \sqrt{OB^2 - OH^2}.$$

Tương tự với tam giác  $OIP$ , ta có:  $IP = \sqrt{OP^2 - OI^2}$

Mà  $OB = OP (= R)$  và  $OH = OI \text{ (cmt)} \Rightarrow HB = IP$

Tam giác  $AOB$  cân tại  $O$  có  $OH$  là đường cao nên đồng thời là đường trung tuyến hay  $H$  là trung điểm của  $AB$ , tương tự  $I$  là trung điểm của  $PQ$  mà  $HB = IP \text{ (cmt)} \Rightarrow AB = PQ \text{ (đpcm)}$ .



**Bài toán 16.** Cho đường tròn  $(O)$  hai dây  $AB$  và  $CD$  song song với nhau biết  $AB = 3 \text{ cm}$ ,  $CD = 4 \text{ cm}$ . Khoảng cách giữa hai dây là  $3,5 \text{ cm}$ . Tính bán kính đường tròn  $(O)$ .

**Lời giải**

Kẻ  $OH \perp AB$  tam giác  $AOB$  cân tại  $O$  nên đường cao  $OH$  đồng thời là đường trung tuyến

hay  $HA = HB = \frac{AB}{2} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ (cm)}$ .

Mặt khác vì  $AB \parallel CD$  nên  $OH \perp CD$  tại  $K$

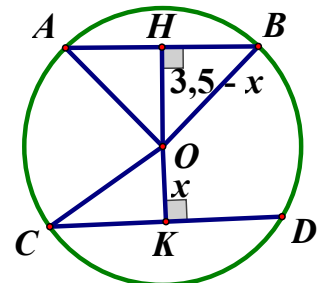
ta cũng có

$$KC = KD = \frac{CD}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ (cm)}$$

Khi đó các tam giác  $AHO$  và  $CKO$  vuông. Theo định lý Pythagore:

$$\left. \begin{aligned} AH^2 + OH^2 &= OA^2 (= R^2) \\ CK^2 + OK^2 &= OC^2 (= R^2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow AH^2 + OH^2 = CK^2 + OK^2 \text{ (*)}$$

Đặt  $OK = x \Rightarrow OH = 3,5 - x \text{ (**)}$



Thay (\*\*) vào (\*) ta có

$$\begin{aligned} 1,5^2 + (3,5 - x)^2 &= 2^2 + x^2 \\ \Leftrightarrow 2,25 + 3,5^2 - 7x + x^2 &= 4 + x^2 \\ \Leftrightarrow -7x &= -10,5 \\ \Leftrightarrow x &= 1,5 \text{ ( cm )}. \end{aligned}$$

Xét tam giác vuông CKO ta có:  $CO^2 = OK^2 + CK^2$  (định lý Pythagore)

$$\begin{aligned} R^2 &= 1,5^2 + 2^2 = 6,25 \\ \Rightarrow R &= 2,5 \text{ ( cm )}. \end{aligned}$$

**Bài toán 17.** Gọi I là trung điểm của dây cung AB không qua tâm của đường tròn  $(O; R)$ . Qua I vẽ dây cung CD.

- Chứng tỏ  $CD \geq AB$ . Tìm độ dài nhỏ nhất, lớn nhất của các dây quay quanh I.
- Cho  $R = 5 \text{ cm}$ ,  $OI = 4 \text{ cm}$ . Tính độ dài dây cung ngắn nhất qua I.
- Chứng tỏ rằng:  $\widehat{OAI} > \widehat{ODI}$ .

### Lời giải

- Kẻ  $OK \perp CD$ , ta có tam giác OKI vuông tại K  $\Rightarrow OI \geq OK$  (cạnh huyền lớn hơn cạnh góc vuông).

có I là trung điểm của AB (gt).

Tam giác AOB cân tại O ( $OA = OB = R$ ) nên đường trung tuyến OI đồng thời là đường cao hay  $OI \perp AB$ .

Xét tam giác vuông AIO, theo định lý Pythagore:  $AI = \sqrt{OA^2 - OI^2}$ .

Tương tự với tam giác vuông OKD:  $KD = \sqrt{OD^2 - OK^2}$

Mà  $OI > OK$  (cmt)  $\Rightarrow KD > AI$ , mà K là trung điểm của CD và I là trung điểm của AB  $\Rightarrow CD \geq AB$ .

Dấu " $=$ " xảy ra khi  $CD = AB$ .

Do đó độ dài nhỏ nhất của CD bằng AB hay CD trùng với AB. Hiển nhiên đường kính qua I là dây lớn nhất.

- Ta có  $\triangle OIA$  vuông tại I:

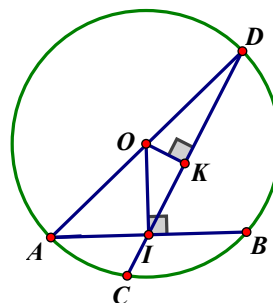
$$AI = \sqrt{OA^2 - OI^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ ( cm )}$$

Do đó dây cung  $AB = 6 \text{ ( cm )}$ .

$$c) \sin \widehat{OAI} = \frac{OI}{OA} = \frac{OI}{R}; \sin \widehat{ODI} = \frac{OK}{OD} = \frac{OK}{R}$$

$$\text{Mà } OI > OK \Rightarrow \frac{OI}{R} > \frac{OK}{R}$$

$$\text{hay } \sin \widehat{OAI} > \sin \widehat{ODI} \Rightarrow \widehat{OAI} > \widehat{ODI}.$$



### III. Toán thực tế

**Bài toán 18.** Trên mặt một chiếc đồng hồ có các vạch chia như hình vẽ.



Hỏi cứ sau mỗi khoảng thời gian 36 phút:

- Đầu kim phút vạch nên một cung có số đo bằng bao nhiêu độ?
- Đầu kim giờ vạch nên một cung có số đo bằng bao nhiêu độ?

#### Lời giải

a) Kim phút vạch nên một cung sau 36 phút là:

$$6^\circ \cdot 36 = 216^\circ.$$

b) Kim giờ quay chậm hơn kim phút là 12 lần, ta có:

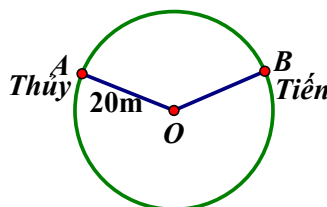
$$216^\circ : 12 = 18^\circ.$$

**Bài toán 19.** Trong một trò chơi, hai bạn

Thủy và Tiến cùng chạy trên một đường tròn tâm  $O$  có bán kính 20 m (hình vẽ).

Có thời điểm nào dây  $AB$  nối vị trí của

hai bạn đó có độ dài bằng 41 m hay không? Vì sao?



#### Lời giải

Không có thời điểm nào dây  $AB$  nối vị trí của hai bạn đó có độ dài bằng 41 m : vì độ dài dây  $AB$  không vượt quá độ dài đường kính:  $2 \cdot 20 = 40$  (m) của đường tròn.

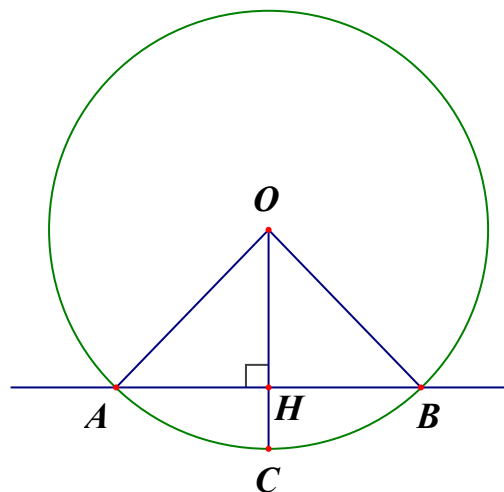
Do đó  $AB \leq 40$ .

**Bài toán 20.** Có thể xem guồng nước (còn gọi là cọn nước) là một công cụ hay cỗ máy có dạng hình tròn, quay được nhờ sức nước chảy (hình a). Guồng nước thường thấy ở các vùng miền núi. Nhiều guồng nước được làm bằng tre, dùng để đưa nước lên ruộng cao, giã gạo hoặc làm một số việc khác.

Giả sử ngăn nước ngăn cách giữa phần trên và phần dưới của một guồng nước được biểu thị bởi cung ứng với một cây dài 4 m và điểm ngấp sâu nhất là 0,5 m (hình b, điểm ngấp sâu nhất là điểm  $C$ , ta có  $AB = 4$  m và  $HC = 0,5$  m. Dựa vào đó, em hãy tính bán kính của guồng nước.



a)



b)

### Lời giải

Gọi bán kính của đường tròn (O) là  $R$ , ta có:

$$OA = OB = OC = R \text{ và } OH = OC - HC = R - 0,5 = R - \frac{1}{2}$$

Tam giác  $AOB$  cân tại O nên đường cao  $OH$  đồng thời là đường trung tuyến hay  $H$  là trung điểm của  $AB$ , ta có:

$$HA = HB = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ (cm)}$$

Xét tam giác  $AHO$  vuông tại  $H$ . Theo định lí Pythagore, ta có:

$$\begin{aligned} OA^2 &= OH^2 + AH^2 \text{ hay } R^2 = \left(R - \frac{1}{2}\right)^2 + 2^2 \\ \Leftrightarrow R^2 &= R^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}R + \frac{1}{4} + 4 \\ \Leftrightarrow R &= \frac{1}{4} + 4 \Leftrightarrow R = \frac{17}{4} = 4,25 \text{ (m)}. \end{aligned}$$

Vậy bán kính của guồng nước là 4,25 (m).

## Bài 15. ĐỘ DÀI CỦA CUNG TRÒN.

### DIỆN TÍCH HÌNH QUẠT TRÒN VÀ HÌNH VÀNH KHUYÊN

#### PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

##### 1. Độ dài của cung tròn

Công thức tính độ dài của cung tròn  $(O; R)$

$$C = \pi d = 2\pi R$$

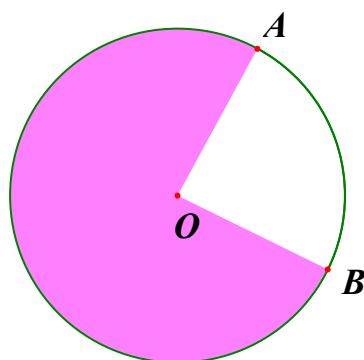
( $d$  là đường kính của đường tròn,  $C$  là độ dài của đường tròn)

Độ dài  $l$  của cung  $n^\circ$  trên đường tròn  $(O; R)$  là  $l = \frac{\pi}{180} n.R$ .

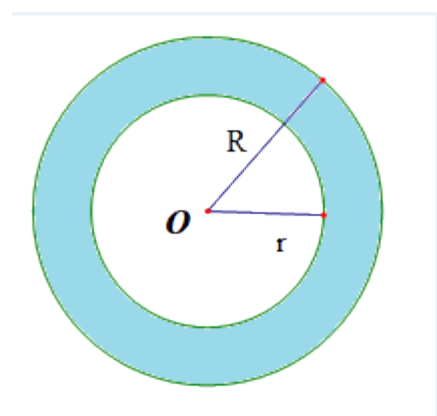
##### 2. Hình quạt tròn và hình vành khuyên

Định nghĩa

1) Hình quạt tròn là phần hình tròn giới hạn bởi một cung tròn và hai bán kính đi qua hai đầu mút của cung đó (Hình a).



Hình a



Hình b

2) Hình vành khuyên (còn gọi là hình vành khăn) là phần nằm giữa hai đường tròn có cùng tâm và bán kính khác nhau (còn gọi là hai đường tròn đồng tâm) (Hình b).

Diện tích của hình quạt tròn và hình vành khuyên

$$S_q = \frac{n}{360} \pi R^2 = \frac{lR}{2}.$$

( $S_q$  : diện tích hình quạt tròn;  $R$  : bán kính ứng với cung  $n^\circ$  )

$$S_v = \pi(R^2 - r^2) \text{ với } R > r$$

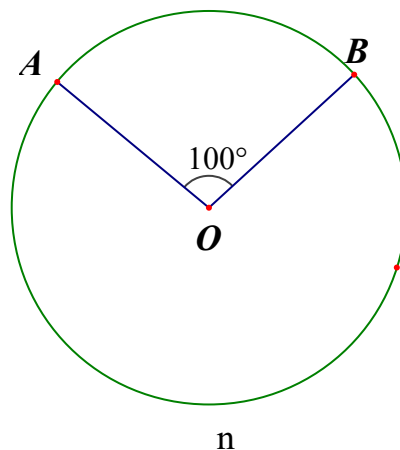
( $S_v$  : diện tích hình vành khuyên;  $R, r$  : bán kính của hai đường tròn đồng tâm).

#### PHẦN B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

##### I. Tính độ dài các cung tròn. Diện tích các hình

**Bài toán 1.** Cho  $A$  và  $B$  là hai điểm trên đường tròn  $(O; 0,8)$  sao cho  $\widehat{AOI} = 100^\circ$ . Tính số đo và độ dài các cung có hai mút  $A, B$ .

**Lời giải**



$A, B$  là hai điểm trên  $(O)$  nên sẽ có hai cung.

Cung nhỏ  $AB$  bị chắn bởi góc ở tâm  $AOB$

$$\text{sd} \widehat{AB} = \widehat{AOB} = 100^\circ.$$

Do đó độ dài của cung nhỏ  $AB$  là:

$$l = \frac{100}{180} \cdot \pi \cdot 8 = \frac{40}{9} \pi (\text{cm})$$

Cung lớn  $AnB$  có số đo:

$$\text{sd} \widehat{AnB} = 360^\circ - 100^\circ = 260^\circ$$

Do đó độ dài của cung lớn là:

$$l = \frac{260}{180} \cdot \pi \cdot 8 = \frac{104}{9} \pi (\text{cm}).$$

**Bài toán 2.** Tính độ dài cung  $90^\circ$  của đường tròn  $(O; 6 \text{ cm})$ .

**Lời giải**

Ta có:  $n = 90^\circ$  và  $R = 4 \text{ cm}$ . Do đó độ dài cung:

$$l = \frac{90}{180} \cdot \pi \cdot 6 = 3\pi (\text{cm}).$$

**Bài toán 3.** Tính diện tích hình quạt tròn có bán kính  $4 \text{ cm}$ , ứng với cung  $36^\circ$ .

**Lời giải**

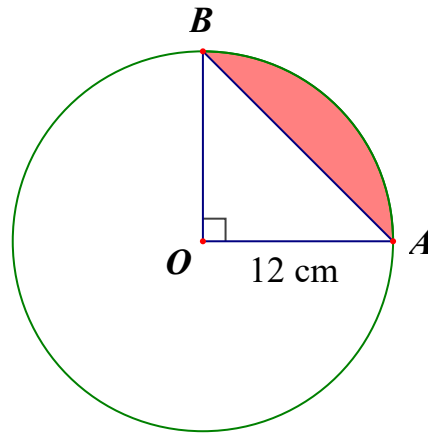
Ta có:  $n = 36^\circ$  và  $R = 4 \text{ cm}$ . Do đó độ dài cung:

$$S_q = \frac{36}{360} \cdot \pi \cdot 4^2 = 1,6\pi (\text{cm}^2).$$

**Bài toán 4.** (Xem hình vẽ)

a) Tính diện tích hình quạt tròn tâm  $O$  cung nhỏ  $AB$ .

b) Tính diện tích hình giới hạn bởi dây  $AB$  và cung nhỏ  $AB$  (gọi là hình viên phân tâm  $O$  cung nhỏ  $AB$ ). Làm tròn kết quả đến hàng phần mười centimet vuông).



**Lời giải**

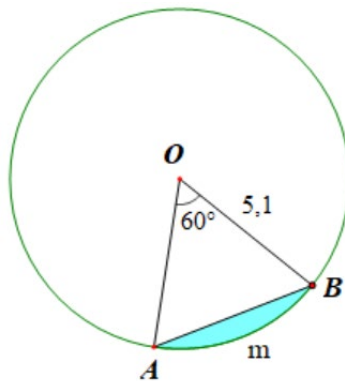
a) Ta có:  $\widehat{AOB} = 90^\circ$  nên  $sđ \widehat{AB} = \widehat{AOB} = 90^\circ$ . Do đó:  $S_q = \frac{90}{360} \cdot \pi \cdot 12^2 = 36\pi \text{ (cm}^2\text{)}$ .

b) Ta có:  $S_{vp} = S_q - S_{AOB}$  ( $S_{vp}$  là diện tích hình viên phân;  $S_{AOB}$  là diện tích tam giác  $AOB$ ).

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 = 72 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{Vậy } S_{vp} = 36\pi - 72 \approx 41,0 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

**Bài toán 5.** Phần hình tròn được giới hạn bởi một cung và dây căng cung đó gọi là hình viên phân. Tính diện tích hình viên phân  $AmB$ , biết góc ở tâm  $\widehat{AOB} = 60^\circ$  và bán kính đường tròn là 5,1 cm (hình vẽ) (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của  $\text{cm}^2$ ).



**Lời giải**

Gọi  $S_{vp}$  là diện tích hình viên phân,  $S_q$  là diện tích hình quạt và  $S_{AOB}$  là diện tích tam giác  $AOB$ .

$$\text{Ta có: } S_q = \frac{60}{360} \cdot \pi \cdot (5,1)^2 \approx 13,62 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Xét  $\triangle AOB$  cân tại  $O$  ( $OA = OB = R$ ) có  $\widehat{AOB} = 60^\circ$  nên tam giác  $AOB$  đều.

$$\text{Do đó } S_{AOB} = \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(5,1)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \approx 11,26 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{Do đó } S_{vp} = S_q - S_{AOB} = 13,62 - 11,26 \approx 2,36 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

## II. Đơn thức đồng dạng

**Bài toán 6.** Tính diện tích hình vành khuyên nằm giữa hai đường tròn đồng tâm có bán kính là 6 cm và 4 cm.

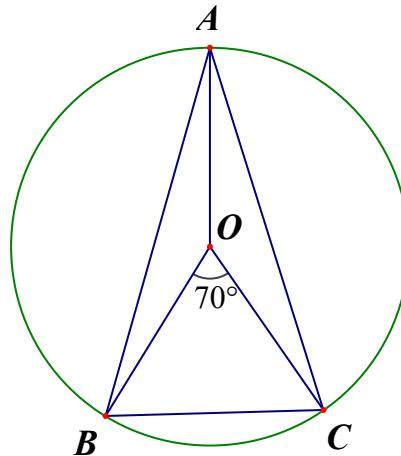
### Lời giải

Gọi  $S_v$  là diện tích hình vành khuyên cần tính.

$$\text{Ta có: } S_v = \pi \cdot (6^2 - 4^2) = 20\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

**Bài toán 7.** Cho đường tròn  $(O; 4 \text{ cm})$  và ba điểm  $A, B, C$  trên đường tròn đó sao cho tam giác  $ABC$  cân tại đỉnh  $A$  và số đo cung nhỏ  $BC$  bằng  $70^\circ$ .

- Giải thích tại sao hai cung nhỏ  $AB$  và  $AC$  bằng nhau.
- Tính độ dài của các cung  $BC, AB$  và  $AC$  (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



### Lời giải

a) Nối  $O$  với  $A$ . Xét tam giác  $AOB$  và tam giác  $AOC$  có:

$OA$ : cạnh chung,  $AB = AC$  (gt),

$OB = OC (= 4 \text{ cm})$

Do đó  $\triangle AOB = \triangle AOC$  (c.c.c)

$$\Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{AOC} \Rightarrow sđ \widehat{AB} = sđ \widehat{AC}$$

b) Gọi độ dài của cung  $BC$  là  $l_1$ , ta có:

$$l_1 = \frac{70}{180} \cdot \pi \cdot 4 = \frac{14}{9} \pi \approx 4,9 \text{ (cm)}.$$

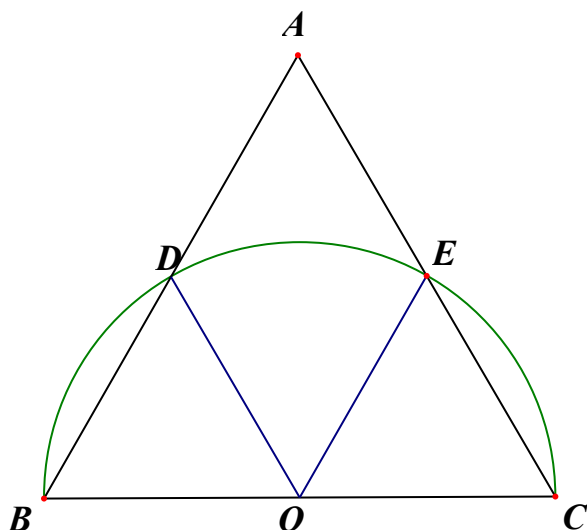
$$\text{Ta có: } sđ \widehat{AB} = sđ \widehat{AC} = \frac{360^\circ - 70^\circ}{2} = 145^\circ.$$

Gọi  $l_2, l_3$  lần lượt là độ dài của cung  $AB$  và  $AC$ , ta có:

$$l_2 = l_3 = \frac{145}{180} \cdot \pi \cdot 4 = \frac{29}{9} \pi \approx 10,1 \text{ (cm)}.$$

**Bài toán 8.** Cho tam giác đều  $ABC$  có  $AB = 2\sqrt{3}$  cm. Nửa đường tròn đường kính  $BC$  cắt hai cạnh  $AB$  và  $AC$  lần lượt tại  $D$  và  $E$  (khác  $B$  và  $C$ ) (hình vẽ).

- a) Chứng tỏ rằng ba cung nhỏ  $BD, DE$  và  $EC$  bằng nhau. Tính số đo mỗi cung ấy.  
b) Tính diện tích của hình viên phân giới hạn bởi dây  $BD$  và cung nhỏ  $BD$ .



**Lời giải**

a) Tam giác  $ABC$  đều (gt)  $\Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$ .

Gọi  $O$  là tâm của nửa đường tròn đường kính  $BC$ , ta có tam giác  $BOD$  cân tại  $O$  có  $\hat{B} = 60^\circ$  (cmt)  $\Rightarrow \triangle BOD$  là tam giác đều  $\Rightarrow \widehat{BOD} = 60^\circ$ .

Tương tự với tam giác  $COE \Rightarrow \widehat{COE} = 60^\circ$ .

Do đó  $\widehat{DOE} = 180^\circ - (\widehat{BOD} + \widehat{COE}) = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ$ .

Ta có  $\widehat{BOD} = \widehat{DOE} = \widehat{COE} = 60^\circ$   
 $\Rightarrow \text{sd } \widehat{BD} = \text{sd } \widehat{DE} = \text{sd } \widehat{EC} = 60^\circ$ .

b) Ta có  $S_{vp} = S_q - S_{BOD}$

Tam giác  $ABC$  đều  $\Rightarrow BC = AC = AB = 2\sqrt{3}$  ( cm)

$$\Rightarrow OB = OC = \frac{BC}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ ( cm)}$$

$$S_q = \frac{60}{360} \cdot \pi (\sqrt{3})^2 = \frac{1}{2} \pi = 1,57 \text{ ( cm}^2 \text{)}$$

$$S_{BOD} = \frac{(\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ ( cm}^2 \text{)} \approx 1,30 \text{ ( cm}^2 \text{)}$$

Vậy  $S_{vp} = 1,57 - 1,30 \approx 0,27 \text{ ( cm}^2 \text{)}$ .

**II. Toán thực tế**

**Bài toán 9.** Có hai chiếc bánh pizza hình tròn (hình vẽ). Chiếc bánh thứ nhất (hình a) có đường kính 16 cm được cắt thành 6 miếng đều nhau có dạng hình quạt tròn. Chiếc bánh thứ hai (hình b) có đường kính 18 cm cắt thành 8 miếng đều nhau có dạng hình quạt tròn. Hãy so sánh diện tích bề mặt của hai miếng bánh cắt ra từ chiếc bánh thứ nhất và thứ hai.



Hình a



Hình b

### Lời giải

Miếng bánh được cắt ra từ chiếc bánh thứ nhất (hình a) có dạng hình quạt tròn bán kính  $R_1 = 16 : 2 = 8$  cm ứng với cung  $360^\circ : 6 = 60^\circ$  có diện tích bề mặt là:

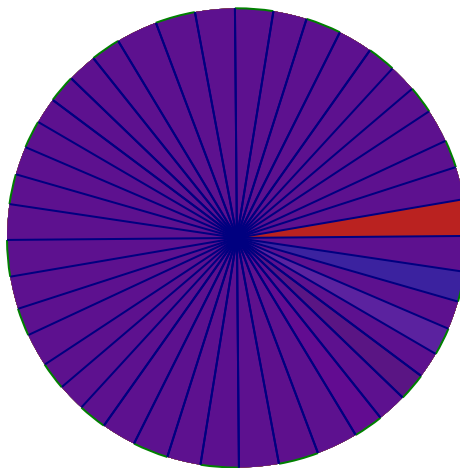
$$S_a = \frac{60}{360} \cdot \pi \cdot 8^2 = \frac{32}{3} \pi \approx 33,5 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Miếng bánh được cắt ra từ chiếc bánh thứ hai (hình b) có dạng hình quạt tròn bán kính  $R_2 = 18 : 2 = 9$  cm ứng với cung  $360^\circ : 8 = 45^\circ$  có diện tích bề mặt là:

$$S_b = \frac{45}{360} \cdot \pi \cdot 9^2 = \frac{81}{8} \pi \approx 31,8 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vậy diện tích bề mặt của miếng bánh được cắt ra từ chiếc bánh thứ nhất lớn hơn diện tích bề mặt của miếng bánh được cắt ra từ chiếc bánh thứ hai.

**Bài toán 10.** Một hoạ tiết trang trí có dạng hình tròn bán kính 4dm được chia thành nhiều hình quạt tròn (hình vẽ), mỗi hình quạt có góc ở tâm là  $7,5^\circ$ . Diện tích của mỗi hình quạt đó là bao nhiêu decimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



**Lời giải**

**Lời giải**

Mỗi hình quạt được chia ra chẵn cung  $7,5^\circ$  và có bán kính đường tròn là 4 dm .

Do đó diện tích của mỗi hình quạt là:  $S_q = \frac{7,5}{360} \cdot \pi \cdot 4^2 = \frac{1}{3} \pi \approx 1,05 \text{ (dm}^2\text{)}.$

**Bài toán 11.** Một chiếc quạt giấy khi xoè ra có dạng nửa hình tròn bán kính 2,2 dm như hình vẽ. Tính diện tích phần giấy của chiếc quạt, biết rằng khi gấp lại, phần giấy có chiều dài khoảng 1,6 dm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của  $\text{dm}^2$  ?



**Lời giải**

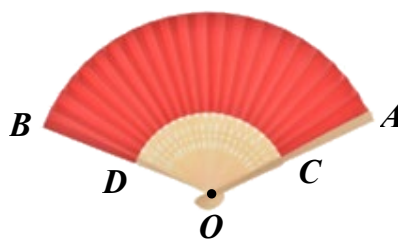
Phần giấy của chiếc quạt có dạng hình vành khuyên.

Gọi diện tích của phần giấy là  $S_v$  , ta có:

$$S_v = \frac{1}{2} \pi (R^2 - r^2) \text{ trong đó } r = R - 1,6 = 2,2 - 1,6 = 0,6 \text{ (dm)}$$

$$S_v = \frac{1}{2} \pi (2,2^2 - 0,6^2) \approx 7,03 \text{ (dm}^2\text{)}.$$

**Bài toán 12.** Trong hình vẽ chiếc quạt có dạng một hình quạt tròn tâm  $O$  cung  $AB$  , bán kính  $OA = OB = 20$  cm . Giấy được dán trong phần giới hạn bởi cung  $AB$  , cung  $CD$  , đoạn thẳng  $AC$  và  $BD$  với  $OC = OD = 10$  cm . Biết khi mở rộng tối đa, hai nan quạt ngoài cùng tạo thành một góc  $AOB$  bằng  $140^\circ$  . Tính chu vi và diện tích mảnh giấy để dán một mặt quạt (diện tích mép dán không đáng kể).



**Lời giải**

$$\text{Độ dài cung } AB: l_1 = \frac{140}{180} \cdot \pi \cdot 20 = \frac{140}{9} \pi$$

$$\text{Độ dài cung } CD: l_2 = \frac{140}{180} \cdot \pi \cdot 10 = \frac{70}{9} \pi$$

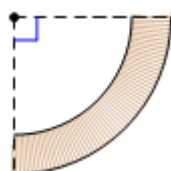
Gọi  $P$  là chu vi mảnh giấy, ta có:

$$\begin{aligned} P &= l_1 + BD + l_2 + AC \\ &= \frac{140}{9} \pi + 10 + \frac{70}{9} \pi + 10 = 20 + \left( \frac{140}{9} + \frac{70}{9} \right) \pi \\ &= 20 + \frac{70}{3} \pi \approx 93 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

Gọi  $S_v$  là diện tích mảnh giấy, ta có:

$$S = \frac{140}{360} \pi (20^2 - 10^2) = \frac{350}{3} \pi \approx 366,5 \text{ (cm}^2\text{)}$$

**Bài toán 13.** Hình vẽ bên mô tả mặt cắt của một khúc gỗ có dạng một phần tư hình vành khuyên, trong đó hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm và có bán kính lần lượt là 4dm và 3dm. Diện tích mặt cắt đó là bao nhiêu decimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



**Lời giải**

Mặt cắt khúc gỗ có dạng hình vành khuyên, gọi  $S$  là diện tích mặt cắt. Ta có:

$$S_v = \frac{1}{4} \pi (4^2 - 3^2) = \frac{7}{4} \pi \approx 5,5 \text{ (dm}^2\text{)}.$$

**Bài toán 14.** Một máy kéo nông nghiệp có đường kính bánh xe sau là 124 m và đường kính bánh xe trước là 80 cm. Hỏi khi bánh xe sau lăn được 20 vòng thì bánh xe trước lăn được bao nhiêu vòng?



**Lời giải**

Chu vi bánh xe sau là  $124\pi$ , khi bánh xe sau lăn được 20 vòng, ta có:

$$124\pi \cdot 20 = 2480\pi \text{ (cm)}$$

Chu vi bánh xe trước là  $80\pi$

Do đó khi bánh xe sau lăn được 20 vòng thì bánh xe trước lăn được:

$$2480\pi : 80\pi = 31 \text{ (vòng)}.$$

**Bài toán 15.** Ba bộ phận truyền chuyển động của một chiếc xe đạp gồm một giò đĩa (bánh răng gắn với bàn đạp), một chiếc líp (cũng có dạng bánh răng gắn với bánh xe và bộ xích (hình vẽ)). Biết rằng giò đĩa có bán kính 15 cm, líp có bán kính 4 cm và bánh xe có đường kính 65 cm. Hỏi khi người đi xe đạp một vòng thì xe chạy được quãng đường dài bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng phần chục)?



**Lời giải**

Chu vi bánh xe  $65\pi$ , chu vi líp  $8\pi$ , chu vi giò đĩa  $30\pi$ .

Khi người đi xe đạp đạp một vòng giò đĩa thì líp quay được:  $30\pi : 8\pi = \frac{15}{4}$  (vòng)

Do đó xe chạy được quãng đường là:

$$\begin{aligned} 65\pi \cdot \frac{15}{4} &= \frac{975}{4}\pi \\ &= 765,76 \text{ (cm)} \approx 7,7 \text{ (m)} \end{aligned}$$

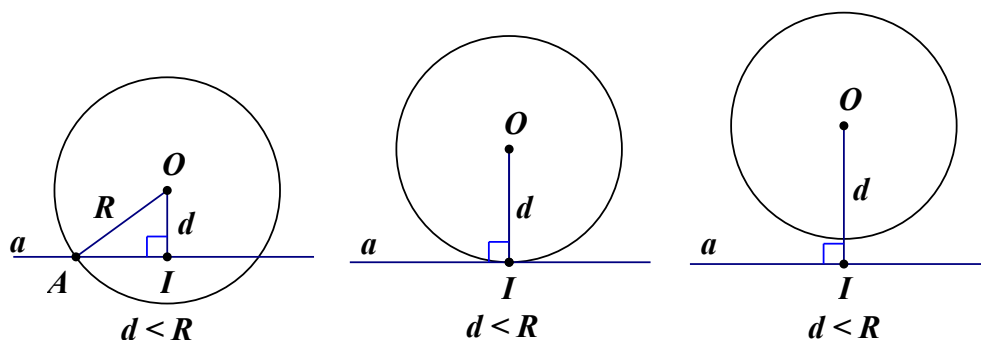
Khi người đi xe đạp một vòng thì xe chạy được quãng đường dài khoảng 7,7 (m).

## Bài 16. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

### PHẦN A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### I. Ba vị trí tương đối

Gọi  $OI = d$  là khoảng cách từ  $O$  đến  $a$ .



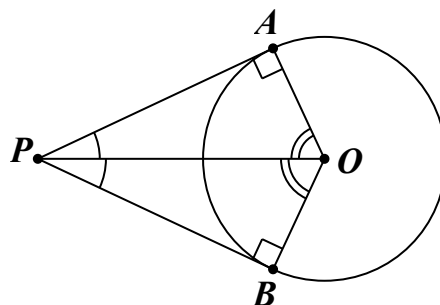
- a)  $d < R$ :  $(O)$  và  $a$  có hai điểm chung. Ta nói  $(O)$  và  $a$  cắt nhau.  
 b)  $d = R$ :  $(O)$  và  $a$  chỉ có 1 điểm chung là  $I$ . Ta nói  $(O)$  và  $a$  tiếp xúc nhau tại  $I$ ,  $I$  là tiếp điểm,  $a$  là tiếp tuyến.  
 c)  $d > R$ :  $(O)$  và  $a$  không có điểm chung. Ta nói  $(O)$  và  $a$  không giao nhau.

#### II. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

**Định lý 1:** Nếu một đường thẳng đi qua một điểm nằm trên một đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

#### III. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

**Định lý 2:** Nếu hai tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  cắt nhau tại điểm  $P$  thì:



- Điểm  $P$  cách đều hai tiếp điểm.
- $PO$  là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
- $OP$  là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính qua hai tiếp điểm.

### PHẦN B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

#### I. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

**Bài toán 1.** Cho đường thẳng  $a$  và một điểm  $O$  cách  $a$  một khoảng 7 cm. Hãy xác định vị trí tương đối của  $a$  với các đường tròn sau:

- a) Đường tròn  $(O; 5 \text{ cm})$ ;  
 b) Đường tròn  $(O; 7 \text{ cm})$ ;

c) Đường tròn  $(O; 9 \text{ cm})$ .

**Lời giải**

a) Vì  $d > R$  ( $7 > 5$ ) nên  $a$  và đường tròn  $(O; 5 \text{ cm})$  không giao nhau.

b) Vì  $d = R = 7 \text{ cm}$  nên  $a$  và đường tròn  $(O; 7 \text{ cm})$  tiếp xúc.

c) Vì  $d < R$  ( $7 < 9$ ) nên  $a$  và đường tròn  $(O; 9 \text{ cm})$  cắt nhau tại hai điểm.

**Bài toán 2.** Xác định vị trí tương đối của đường thẳng  $a$  đến đường tròn  $(O; 7 \text{ cm})$  nếu khoảng cách từ  $O$  đến  $a$  bằng:

a)  $4 \text{ cm}$ ;

b)  $9 \text{ cm}$ ;

c)  $7 \text{ cm}$ .

**Lời giải**

a) Vì  $d < R$  ( $4 < 7$ ) nên  $a$  cắt đường tròn  $(O; 7 \text{ cm})$  tại hai điểm.

b) Vì  $d > R$  ( $9 > 7$ ) nên  $a$  và đường tròn  $(O; 7 \text{ cm})$  không giao nhau.

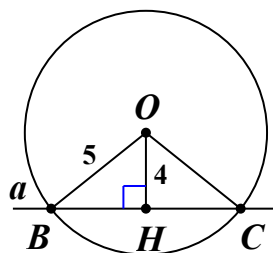
c) Vì  $d = R = 7 \text{ cm}$  nên  $a$  và đường tròn  $(O; 7 \text{ cm})$  tiếp xúc.

**Bài toán 3.** Cho đường thẳng  $a$  và một điểm  $O$  cách  $a$  một khoảng  $4 \text{ cm}$ . Vẽ đường tròn tâm  $O$  bán kính  $5 \text{ cm}$ .

a) Giải thích vì sao  $a$  và  $(O)$  cắt nhau.

b) Gọi  $B$  và  $C$  là các giao điểm của đường thẳng  $a$  và đường tròn  $(O; 5 \text{ cm})$ . Tính độ dài dây  $BC$ .

**Lời giải**



a) Gọi  $OH$  là khoảng cách từ  $O$  đến đường thẳng  $a$ , khi đó  $OH < OB$  ( $4 < 5$ ) hay  $d < R$ , nên đường thẳng  $a$  cắt đường tròn  $(O; 5 \text{ cm})$  tại 2 điểm.

b) Dễ thấy tam giác  $BOC$  cân tại  $O$  ( $OB = OC = R$ ) nên đường cao  $OH$  đồng thời là đường trung tuyến hay  $H$  là trung điểm của  $BC$ .

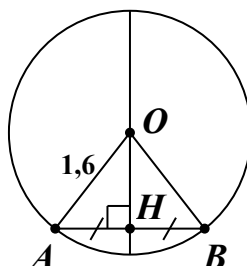
Xét tam giác  $BHO$  vuông tại  $H$ . Theo định lý Pythagore, ta có:

$$\begin{aligned} OB^2 &= OH^2 + BH^2 \Rightarrow BH^2 = OB^2 - OH^2 = 5^2 - 4^2 \\ \Rightarrow BH &= \sqrt{5^2 - 4^2} = 3(\text{cm}) \end{aligned}$$

Do đó  $BC = 2BH = 2.3 = 6$  (cm).

**Bài toán 4.** Trong hình vẽ, mép ngoài cửa ra vào có dạng một phần của đường tròn bán kính 1,6 m. Hãy tính chiều cao  $HK$  của cửa đó, biết  $AH = 0,9$  m.

**Lời giải**



Xét tam giác  $AHO$  vuông tại  $H$ .

Theo định lý Pythagore, ta có:

$$OA^2 = OH^2 + AH^2$$

$$\Rightarrow OH^2 = OA^2 - AH^2 = 1,6^2 - 0,9^2$$

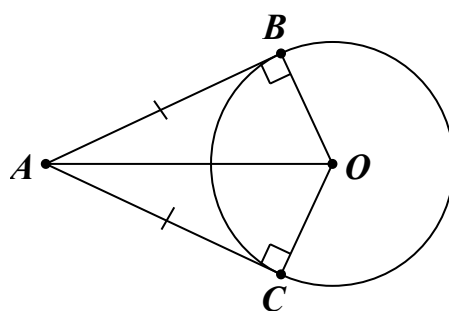
$$\Rightarrow OH = \sqrt{1,6^2 - 0,9^2} = 1,3 \text{ (m)}$$

Chiều cao  $HK = HO + OK = 1,3 + 1,6 = 2,9$  (m).

## **II. Chứng minh đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn**

**Bài toán 5.** Từ điểm  $A$  nằm ngoài đường tròn  $(O; R)$  vẽ tiếp tuyến  $AB$  ( $B$  là tiếp điểm). Lấy một điểm  $C$  trên đường tròn sao cho  $AC = AB$ . Chứng minh rằng  $AC$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .

**Lời giải**



Nối  $A$  với  $(O)$ .

Xét  $\triangle ACO$  và  $\triangle ABO$  có

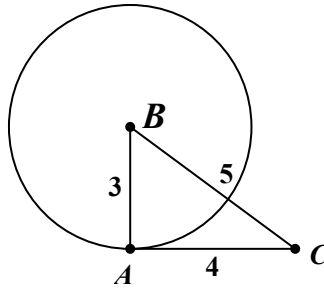
$OA$  cạnh chung,  $AC = AB$  (gt),  $OC = OB$  ( $= R$ )

Do đó  $\triangle ACO = \triangle ABO$  (c.c.c)  $\Rightarrow \widehat{ACO} = \widehat{ABO} = 90^\circ$

Chứng tỏ  $AC \perp OC$  hay  $AC$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .

**Bài toán 6.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 3$ ;  $AC = 4$  và  $BC = 5$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $AC$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(B; 3)$ .

**Lời giải**



Xét tam giác  $ABC$ , ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad (5^2 = 3^2 + 4^2).$$

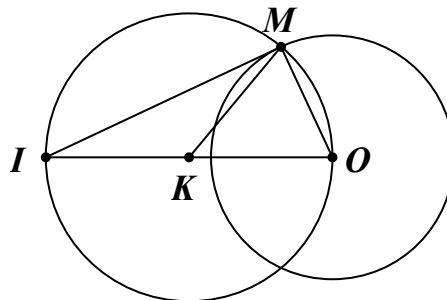
Theo định lý Pythagore đảo, tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  hay  $AB \perp AC$  (1)

Lại có  $AB = 3$  nên điểm  $A$  thuộc đường tròn  $(B; 3)$  (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow AC$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(B; 3)$ .

**Bài toán 7.** Cho đường tròn  $(O)$  và điểm  $I$  ở ngoài đường tròn. Gọi  $M$  là giao điểm của đường tròn tâm  $K$  đường kính  $IO$  và đường tròn  $(O)$ . Chứng minh đường thẳng  $IM$  là tiếp tuyến của  $(O)$  tại  $M$ .

**Lời giải**



$M$  là giao điểm của đường tròn tâm  $K$  đường kính  $IO$  và đường tròn  $(O)$  nên  $M$  thuộc

$$\left(K; \frac{IO}{2}\right), \text{ ta có: } KM = KI = KO \text{ hay } KM = \frac{IO}{2} (*).$$

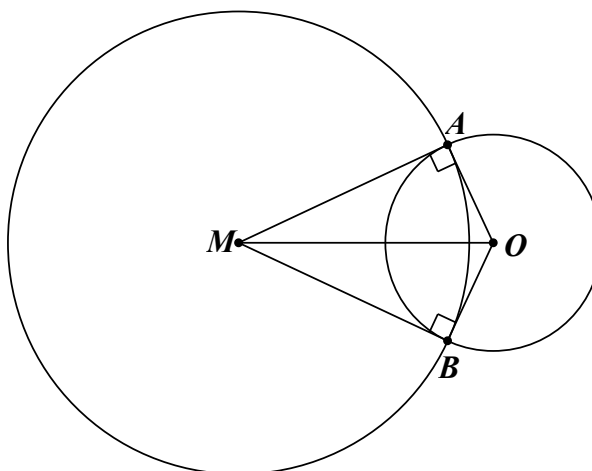
Xét tam giác  $IMO$  có  $K$  là trung điểm của  $IO$  nên  $KM$  là đường trung tuyến và  $(*)$  nên tam giác  $IMO$  vuông tại  $M$  hay  $IM \perp OM$  (1)

Mặt khác  $M \in (O)$  (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow$  đường thẳng  $IM$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  tại  $M$ .

**Bài toán 8.** Cho  $A$  là một điểm thuộc đường tròn  $(O)$ ,  $M$  là một điểm thuộc tiếp tuyến của  $(O)$  tại  $A$  ( $M$  khác  $A$ ). Đường tròn tâm  $M$  bán kính  $MA$  cắt  $(O)$  tại  $B$  ( $B$  khác  $A$ ). Chứng minh rằng  $MB$  là một tiếp tuyến của  $(O)$ .

**Lời giải**



Ta có  $MA$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  tại điểm  $A$  nên  $MA \perp OA$  hay  $\widehat{MAO} = 90^\circ$ .

Đường tròn tâm  $M$  bán kính  $MA$  cắt  $(O)$  tại  $B$  nên  $MB = MA$  và  $B \in (O)$ .

Xét  $\triangle MAO$  và  $\triangle MBO$  có:

$OM$  chung,

$OA = OB = r$  ( $r$  là bán kính đường tròn  $(O)$ )

$MA = MB = R$  ( $R$  là bán kính đường tròn  $(M)$ )

Do đó  $\triangle MAO = \triangle MBO$  (c.c.c)  $\Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^\circ$  hay  $MB \perp OB$

Mà  $\Rightarrow MB$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .

**Bài toán 9.** Cho đường tròn  $(O)$  dây  $BC$  khác đường kính, qua  $O$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $BC$  cắt tiếp tuyến tại  $B$  của đường tròn ở  $A$ . Chứng minh rằng  $AC$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .

**Lời giải**

Gọi  $H$  là giao điểm của  $OA$  và  $BC$

$\triangle BOC$  cân tại  $O$  có  $OH$  là đường cao (gt)

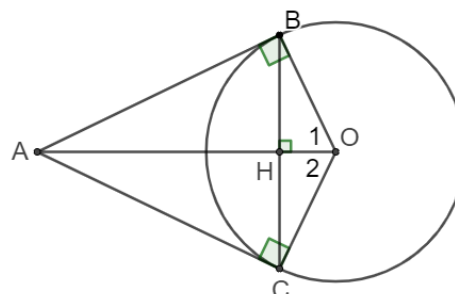
nên đồng thời là đường phân giác:  $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$

Xét  $\triangle ACO$  và  $\triangle ABO$  có:  $OB = OC = R$ ,

$\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$  (cmt),  $AO$  chung

$\Rightarrow \triangle ACO = \triangle ABO$  (c.g.c)  $\Rightarrow \widehat{ACO} = \widehat{ABO} = 90^\circ$

Chứng tỏ  $AC$  là tiếp tuyến của  $(O)$ .



**Bài toán 10.** Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến tại B với đường tròn (O), trên tiếp tuyến lấy P. Qua A kẻ đường thẳng song song với OP cắt (O) tại Q. Chứng minh PQ là tiếp tuyến của đường tròn (O).

**Lời giải**

Ta có:  $AQ \parallel OP$  (gt)

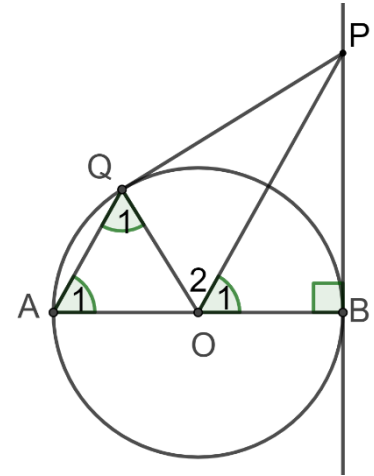
$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{O_1} \text{ (ở vị trí đồng vị)} \\ \widehat{Q_1} = \widehat{O_2} \text{ (ở vị trí so le trong)} \end{cases}$$

$$\text{Mà } \widehat{A_1} = \widehat{Q_1} \text{ (}\triangle AOQ \text{ cân)} \Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{O_2}$$

Xét  $\triangle PQO$  và  $\triangle PBO$  có: OP chung,  $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$  (cmt),  $OQ = OB$  ( $=R$ )

$$\text{Vậy } \triangle PQO = \triangle PBO \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{PQO} = \widehat{PBO} = 90^\circ$$

Hay  $PQ \perp OQ$ , chứng tỏ PQ là tiếp tuyến của (O).



**Bài toán 11.** Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH và BK cắt nhau tại I. Chứng minh rằng HK là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AI.

**Lời giải**

Gọi O là tâm đường tròn đường kính AI. Hiển nhiên K thuộc (O) (vì  $\widehat{AKI} = 90^\circ$ ).

$\triangle ABC$  cân tại A có AH là đường cao (gt) nên AH đồng thời là đường trung tuyến  $\Rightarrow HB = HC$ .

Xét  $\triangle ABKC$  vuông tại K có KH là đường trung tuyến nên

$$KH = BH = \frac{BC}{2}$$

$$\text{Do đó } \triangle BHK \text{ cân tại H} \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{BKH} \text{ (1)}$$

Lại có  $\triangle IOK$  cân tại O ( $OI = OK = R$ )

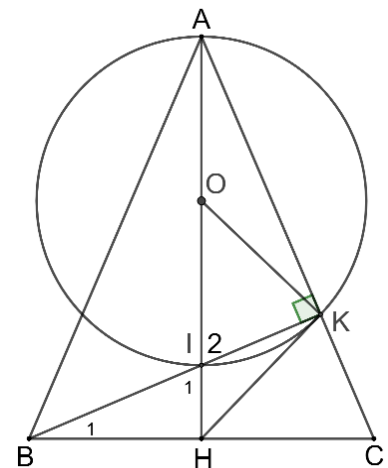
$$\Rightarrow \widehat{I_2} = \widehat{OKI} \text{ mà } \Rightarrow \widehat{I_2} = \widehat{I_1} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \widehat{OKI} = \widehat{I_1} \text{ (2)}$$

$$\text{Mặt khác } \triangle BHI \text{ vuông tại H (gt) nên } \widehat{B_1} + \widehat{I_1} = 90^\circ \text{ (3)}$$

Từ (1), (2) và (3) ta có:  $\widehat{BKH} + \widehat{OKI} = 90^\circ$  hay  $HK \perp OK$

Vậy HK là tiếp tuyến của đường tròn (O)



**Bài toán 12.** Cho đường tròn (O) đi qua ba điểm A, B và C của một tam giác cân tại A. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua A và song song với BC là một tiếp tuyến của (O).

**Lời giải**

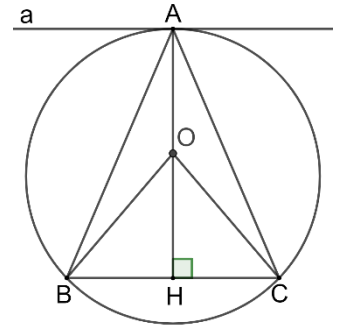
Ta có:  $AB = AC$  (gt)

$OB = OC = R$  ( $R$  là bán kính của đường tròn ( $O$ )) nên  $OA$  thuộc đường trung trực của đoạn  $BC$

hay  $OA \perp BC$  tại  $H$ .

$a$  qua  $A$  và  $a \parallel BC \Rightarrow a \perp OA$  tại  $A$

Chúng tỏ  $a$  là tiếp tuyến của đường tròn ( $O$ ).



**Bài toán 13.** Trong hình vẽ  $AB = 9$ ,  $BC = 12$ ,  $AC = 15$  và  $BC$  là đường kính của đường tròn ( $O$ ). Chứng minh  $AB$  là tiếp tuyến của đường tròn ( $O$ ).

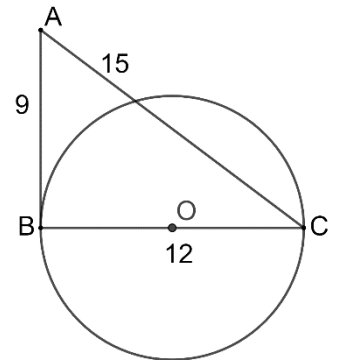
**Lời giải**

Ta có:  $BC^2 + AB^2 = AC^2$  ( $12^2 + 9^2 = 15^2$ )

Theo định lý Pythagore đảo,  $\triangle ABC$  vuông tại  $B$  hay  $AB \perp CB$

mà  $BC$  là đường kính của đường tròn ( $O$ ) (gt)

$\Rightarrow AB$  là tiếp tuyến của đường tròn ( $O$ ).



**Bài toán 14.** Cho đường tròn ( $O$ ;  $R$ ) có đường kính  $AB$ . Vẽ dây  $AC$  sao cho  $AC = R$ . Gọi  $I$  là trung điểm của dây  $AC$ . Đường thẳng  $OI$  cắt tiếp tuyến  $Ax$  tại  $M$ . Chứng minh rằng:

- $\widehat{ACB}$  có số đo bằng  $90^\circ$ , từ đó suy ra độ dài của  $BC$  theo  $R$ ;
- $OM$  là tia phân giác của  $\widehat{COA}$ ;
- $MC$  là tiếp tuyến của đường tròn ( $O$ ;  $R$ ).

**Lời giải**

a) Xét  $\triangle AOC$  có  $OA = OC (=R)$

nên  $\triangle AOC$  cân tại  $O$ .

Lại có  $AC = R$  (gt) nên tam giác  $AOC$  đều

$\Rightarrow \widehat{AOC} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{COB} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$  (kề bù)

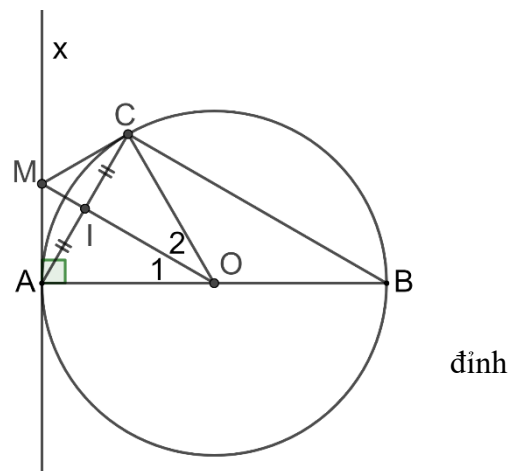
Mặt khác tam giác  $COB$  cũng cân tại  $O$  có góc ở  $120^\circ$

$\Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$

$\triangle AOC$  đều (cmt)  $\Rightarrow \widehat{ACO} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{ACO} + \widehat{OCB} = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$

Ta có  $\triangle ACB$  là nửa tam giác đều có cạnh  $2R$



đỉnh

$$\Rightarrow \text{đường cao } BC = \frac{2R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$$

b) Vì  $AC = R$  (gt) nên tam giác  $AOC$  đều (cmt) có  $OI$  là đường trung tuyến nên đồng thời là đường phân giác của góc  $COA$  hay  $OM$  là tia phân giác của  $\widehat{AOC}$ .

c) Xét  $\triangle MCO$  và  $\triangle MAO$  có:

$OM$  cạnh chung,  $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$  (cmt),  $OC = OA (=R)$

Do đó  $\triangle MCO = \triangle MAO$  (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{MCO} = \widehat{MAO} = 90^\circ \text{ hay } MC \perp OC$$

Mà  $C \in (O)$  nên  $MC$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O; R)$ .

**Bài toán 15.** Cho góc  $xOy$  với đường phân giác  $Ot$  và điểm  $A$  trên cạnh  $Ox$ , điểm  $B$  trên cạnh  $Oy$  sao cho  $OA = OB$ . Đường thẳng qua  $A$  và vuông góc với  $Ox$  cắt  $Ot$  tại  $P$ . Chứng minh rằng  $OA$  và  $OB$  là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn  $(P; PA)$

### Lời giải

Xét  $\triangle OBP$  và  $\triangle OAP$  có:

$OP$  cạnh chung,  $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$  (gt),  $OB = OA$  (gt)

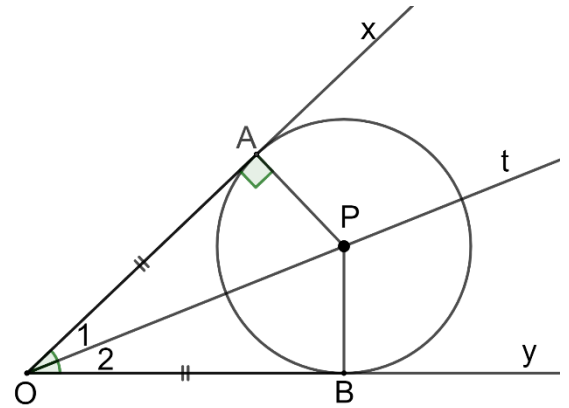
Do đó  $\triangle OBP = \triangle OAP$  (c.g.c)

$\Rightarrow PB = PA$ , chứng tỏ  $B$  thuộc đường tròn tâm  $P$ .

Lại có  $\widehat{OBP} = \widehat{OAP} = 90^\circ$  (góc tương ứng)

$\Rightarrow OB \perp PB$ , chứng tỏ  $OB$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(P; PA)$ .

Vậy  $PA, PB$  là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn  $(P; PA)$ .



**Bài toán 16.** Cho  $SA$  và  $SB$  là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn  $(O)$  ( $A$  và  $B$  là hai tiếp điểm)

Gọi  $M$  là điểm tùy ý trên cung nhỏ  $AB$ . Tiếp tuyến của  $(O)$  tại  $M$  cắt  $SA$  tại  $E$  và cắt  $SB$  tại  $F$ .

a) Chứng minh rằng chu vi của tam giác  $SEF$  bằng  $SA + SB$ .

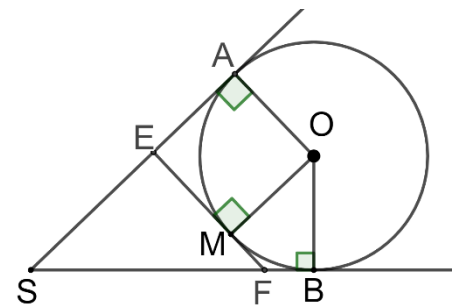
b) Giả sử  $M$  là giao điểm của đoạn  $SO$  với đường tròn  $(O)$ . Chứng minh rằng  $SE = SF$ .

### Lời giải

Gọi  $P$  là chu vi của tam giác  $SEF$ .

Ta có  $P = SE + EM + FM + SF$

mà  $EA = EM$  (tính chất tiếp tuyến cắt nhau)



tương tự  $FM = FB$

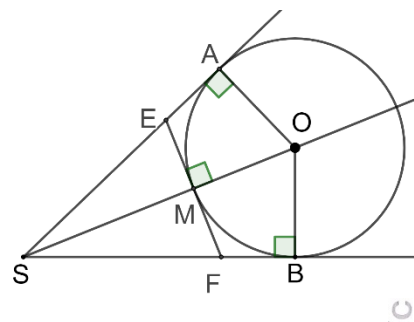
$$\Rightarrow P = SE + EA + FB + SF$$

Mà  $SE + EA = SA$  và  $FB + SF = SB$

$$\Rightarrow P = SA + SB \text{ (đpcm)}$$

Vậy chu vi của tam giác SEF bằng  $SA + SB$ .

b)(Xem hình vẽ).



Khi M là giao điểm của SO với đường tròn (O), ta có:  $EF \perp SO$  tại M.

Xét tam giác ESF có SM là đường cao (vì M là tiếp điểm của tiếp tuyến tại M) đồng thời SM hay SO là đường phân giác (tính chất tiếp tuyến cắt nhau) nên tam giác SEF cân tại S  $\Rightarrow SE = SF$  (đpcm).

**Bài toán 17.** Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O; R). Vẽ đường tròn đường kính AO cắt đường tròn (O; R) tại hai điểm B và C.

a) Chứng minh AB và AC là các tiếp tuyến của đường tròn (O; R).

b) Chứng minh  $AB = AC$ .

c) Xác định tia phân giác của  $\widehat{BAC}$  và  $\widehat{BOC}$

**Lời giải**

a) Gọi I là tâm của đường tròn đường kính OA, ta có I là trung điểm của OA

Đường tròn đường kính OA cắt đường tròn (O; R) tại B và C nên ta có

$$IA = IB = IO = \frac{OA}{2}$$

Xét tam giác ABO có  $IB = \frac{OA}{2}$  (cmt) nên tam giác ABO

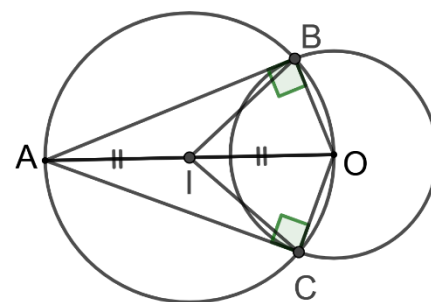
vuông tại B hay  $AB \perp OB$ .

Chứng minh tương tự, ta có  $AC \perp OC$  mà  $B, C \in (O)$

Do đó AB và AC là hai tiếp tuyến của đường tròn (O; R).

b) Theo tính chất hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm, ta có  $AB = AC$ .

c) Tia phân giác của góc BAC và góc BOC là tia OA



**Bài toán 18.** Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. Kẻ các tiếp tuyến tại A và B với nửa đường tròn. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn (M khác A và B) kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến tại A và B lần lượt tại C và D.

a) Chứng minh rằng:  $CD = CA + BD$ ;  $\widehat{COD} = 90^\circ$

b) Chứng minh rằng AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

**Lời giải**

a) Ta có  $CA = CM$ ;  $DB = DM$

(tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau)

Mà  $CD = CM + DM \Rightarrow CD = CA + BD$

Lại có CO và DO là các tia phân giác của góc kề bù  $\widehat{AOM}$  và  $\widehat{BOM}$  nên  $\widehat{COD} = 90^\circ$

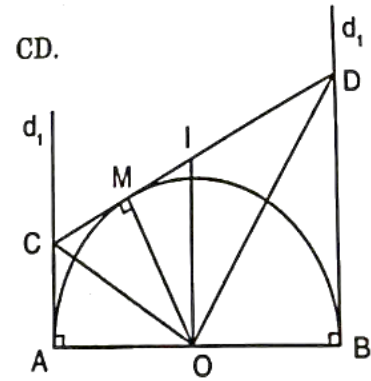
b) Gọi I là trung điểm của CD ta có OI là đường trung tuyến của tam giác vuông COD nên  $IO = IC = ID$

hay I là tâm của đường tròn đường kính CD.

Dễ thấy tứ giác ABCD là hình thang vuông có OI là đường trung bình nên  $IO \parallel AC$  và  $BD$  mà AC và BD cùng vuông góc với AB (gt)

$\Rightarrow IO \perp AB$ .

Chứng tỏ AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.



**Bài toán 19.** Cho đường tròn (O; R) đường kính AB và các đường thẳng m, n, p lần lượt tiếp xúc với đường tròn tại A, B, C (hình vẽ). Chứng minh:

a)  $AD + BE = DE$

b)  $\widehat{COD} = \frac{1}{2}\widehat{COA}$  và  $\widehat{COE} = \frac{1}{2}\widehat{COB}$

c) Tam giác ODE vuông;

d)  $\frac{OD \cdot OE}{DE} = R$

**Lời giải**

a) Ta có các đường thẳng m, n, p lần lượt là các tiếp tuyến tại các điểm A, B, C với đường tròn (O; R).

Ta có  $AD = CD$  (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

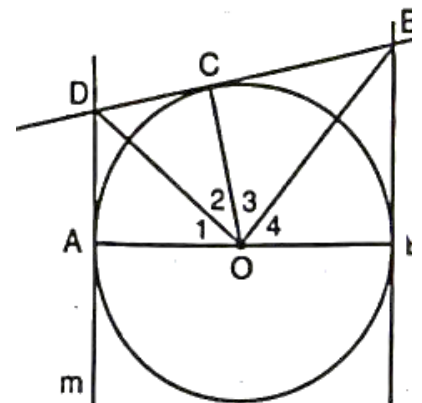
Tương tự  $BE = CE$  mà  $CD + CE = DE \Rightarrow AD + BE = DE$  (đpcm)

Do DC và DA là hai tiếp tuyến cắt nhau tại D,

Ta có: OD là tia phân giác của góc COA hay  $\widehat{COD} = \widehat{AOD} = \frac{1}{2}\widehat{COA}$

Tương tự OE là tia phân giác của góc COB nên  $\widehat{COE} = \widehat{BOE} = \frac{1}{2}\widehat{COB}$

c) Ta có  $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ ;  $\widehat{O_3} = \widehat{O_4}$  (cmt)



$$\text{mà } \widehat{O_1} + \widehat{O_2} + \widehat{O_3} + \widehat{O_4} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{O_2} + \widehat{O_3} = 90^\circ$$

Chứng tỏ  $\triangle ODE$  vuông tại  $O$ .

**Bài toán 20.** Cho đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ .  $C$  là một điểm nằm trên đường tròn  $(O)$ , các tiếp tuyến của đường tròn tại  $A$  và  $C$  cắt nhau ở  $D$ . Gọi  $H$  là hình chiếu của  $C$  trên  $AB$  và  $I$  là giao điểm của  $BD$  và  $CH$ . Chứng minh rằng  $CI = HI$ .

**Lời giải**

a) Ta có:  $DA = DC$  (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$$OA = OC (= R)$$

Nên  $DO$  là đường trung trực của  $AC$

$$\Rightarrow DO \perp AC$$

Lại có  $CB \perp AC$  ( $AB$  là đường kính)

$$\Rightarrow DO \parallel BC \Rightarrow \widehat{AOD} = \widehat{ABC} \text{ (đồng vị)}$$

Do đó  $\triangle DOA \sim \triangle CHB$  (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AO}{HB} = \frac{AD}{HC} \Rightarrow AO \cdot HC = AD \cdot HB \quad (1)$$

Lại có  $IH \parallel AD$  (cùng vuông góc với  $AB$ ) theo hệ quả của định lý Thalès

$$\frac{IH}{AD} = \frac{HB}{AB} \Rightarrow AD \cdot HB = IH \cdot AB \quad (2)$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow AO \cdot HC = IH \cdot AB$  mà  $AB = 2AO$

$$\Rightarrow AO \cdot HC = IH \cdot 2AO \Rightarrow HC = 2IH$$

Chứng tỏ  $I$  là trung điểm của  $HC$  hay  $CI = HI$ .

**Cách khác:**

Có  $\widehat{ACB} = 90^\circ$  ( $AB$  là đường kính)

$$\Rightarrow \widehat{ACE} = 90^\circ \text{ hay } \widehat{ACD} + \widehat{DCE} = 90^\circ \quad (1)$$

$$\triangle ACE \text{ vuông tại } C \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{E} = 90^\circ \quad (2)$$

Lại có  $\triangle ADC$  cân tại  $D$  (tính chất tiếp tuyến cắt nhau)

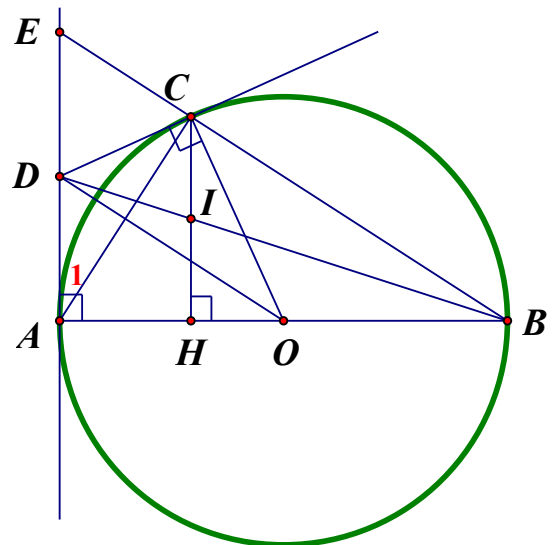
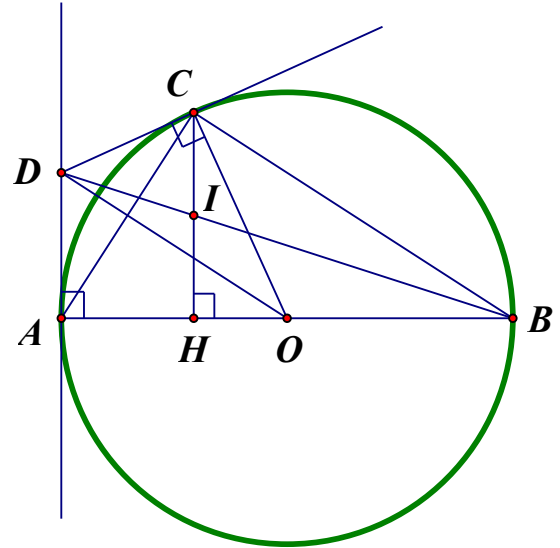
$$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{ACD} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow \widehat{E} = \widehat{DCE}$$

Hay  $\triangle EDC$  cân tại  $D \Rightarrow DE = DC$

Mà  $DC = DA \Rightarrow DE = DA$

Lại có  $AE \parallel CH$  ( $\perp AB$ )



Xét  $\triangle DAB$  có  $IH \parallel AD$

Theo hệ quả của định lý Thalès  $\frac{IH}{AD} = \frac{BI}{BD}$  (4)

Tương tự với  $\triangle BDE$  có  $CI \parallel DE \Rightarrow \frac{IH}{AD} = \frac{CI}{DE}$  mà  $AD = DE$  (cmt)  $\Rightarrow IH = CI$

**Bài toán 21.** Từ điểm P nằm ngoài đường tròn (O; R) vẽ hai tiếp tuyến PA, PB (A, B là các tiếp điểm). Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến đường kính BC. Chứng minh rằng PC cắt AH tại trung điểm I của AH.

**Lời giải**

Gọi D là giao điểm của đường thẳng AC và

BP. Ta có  $\widehat{BAC} = 90^\circ$  (BC là đường kính)

$\Rightarrow \widehat{BAD} = 90^\circ$  (kề bù)

$\Rightarrow \widehat{DAP} + \widehat{PAB} = 90^\circ$  (1)

$\triangle ABD$  vuông tại A (cmt)

$\Rightarrow \widehat{DBA} + \widehat{ADB} = 90^\circ$  (2)

Mặt khác PA, PB là hai tiếp tuyến cắt nhau

tại P của đường tròn (O) nên  $PA = PB$  và  $\widehat{PAB} = \widehat{PBA}$  (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra :  $\widehat{DAP} = \widehat{ADP}$

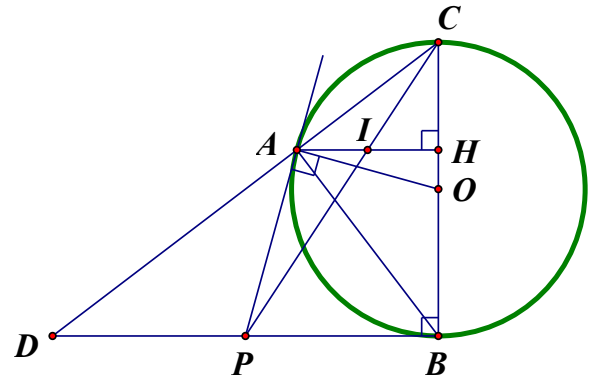
Do đó  $\triangle APD$  cân tại P  $\Rightarrow PA = PD$  mà  $PA = PB$  (tính chất tiếp tuyến cắt nhau)  $\Rightarrow PD = PB$

Lại có  $DB \parallel AH$  ( $\perp BC$ )

Xét  $\triangle PBC$  có  $IH \parallel PB$  ( $\perp BC$ )  $\Rightarrow \frac{IH}{PB} = \frac{IC}{PC}$  (định lý Thalès) (4)

Tương tự  $\triangle PDC$  có  $IA \parallel PD$  ( $\perp BC$ )  $\Rightarrow \frac{IA}{PD} = \frac{IC}{PC}$  (định lý Thalès) (5)

Từ (4) và (5) suy ra :  $\frac{IH}{PB} = \frac{AI}{DP} \Rightarrow IH = AI$  (vì  $PB = PD$ )



**Bài toán 22.** Cho đường tròn tâm I nội tiếp  $\triangle ABC$ , các tiếp điểm trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt là D, E, F. Qua D kẻ đường thẳng song song với BC cắt EF tại N và AE tại M. Chứng minh rằng : M là trung điểm của DN.

**Lời giải**

Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường thẳng EF tại H.



$$\begin{aligned} OA = OB &= \sqrt{OK^2 - AK^2} \\ &= \sqrt{(2R)^2 - R^2} = R\sqrt{3} \end{aligned}$$

Lại có CD tiếp xúc với (K) tại M nên CM = CA và DM = DB

Gọi p là chu vi của  $\triangle OCD$ , ta có

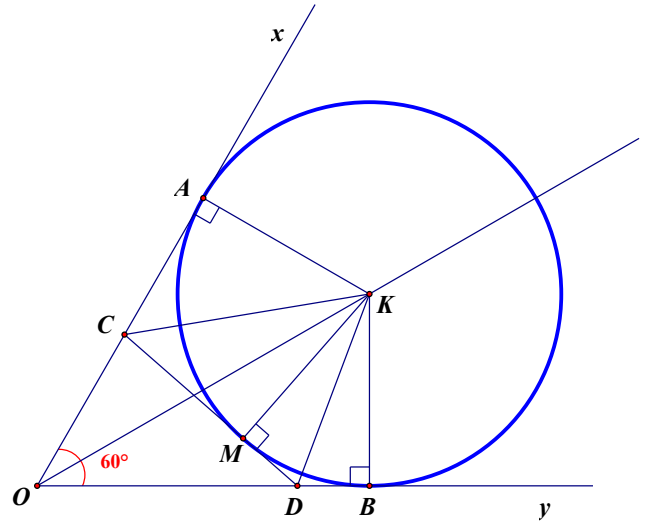
$$\begin{aligned} p_{OCD} &= OC + CM + MD + OD \\ &= OC + CA + DB + OD \\ &= 2OA = 2R\sqrt{3} \text{ (không đổi)} \end{aligned}$$

b) Ta có CK là phân giác của  $\widehat{AKM}$

DK là phân giác của  $\widehat{BKM}$

Mà  $\widehat{AKM} + \widehat{BKM} = \widehat{AKB} = 120^\circ$  (vì  $\widehat{O} = 60^\circ$  và  $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$ )

$$\Rightarrow \widehat{CKD} = \frac{1}{2} \widehat{AKB} = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ \text{ (không đổi)}$$



**Bài toán 24.** Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn. Từ một điểm M trên cung tròn trên cung nhỏ BC kẻ một tiếp tuyến thứ ba cắt hai tiếp tuyến kia tại P và Q. Chứng minh rằng khi M chuyển động trên cung BC thì chu vi tam giác APQ có giá trị không đổi.

### Lời giải

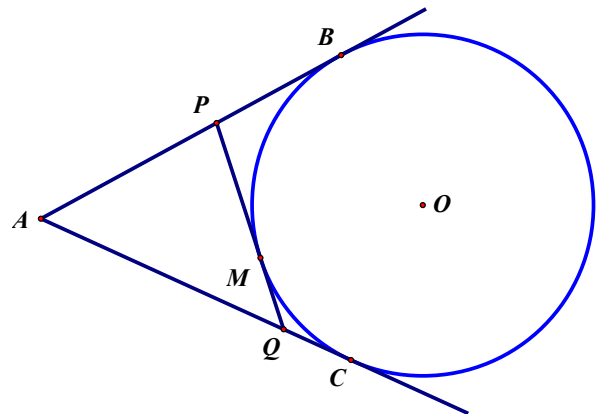
Ta có chu vi  $\triangle APQ$  bằng  $AP + PQ + QA$  và  $PQ = PM + MQ$  nên chu vi  $\triangle APQ$  bằng  $AP + PM + MQ + QA$  (1)

Mặt khác ta có:  $PB = PM$  và  $QC = QM$  (2)  
(tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau)

Từ (1) và (2) ta có :

$$\begin{aligned} AP + PM + MQ + QA &= AP + PB + QC + QA \\ &= AB + AC \end{aligned}$$

Vậy chu vi  $\triangle APQ$  bằng  $AB + AC$  không đổi.



**Bài toán 25.** Cho đường tròn (I ; r) nội tiếp  $\triangle ABC$ , các tiếp điểm trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt là D, E, F. Chứng minh rằng :  $2AD = AB + AC - BC$  (\*)

**Lời giải**

Ta có  $AD = AF$  (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

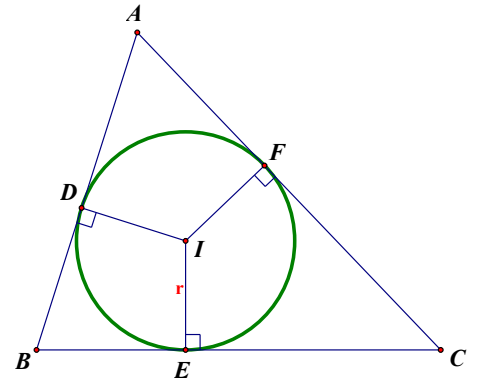
Tương tự  $BD = BE$  và  $CE = CF$

Do đó:

$$AB + AC - BC = AD + BD + AF + CF - (BE + CE)$$

$$= AD + BE + AF + CE - BE - CE$$

$$= AD + AF = 2 AD$$



**Bài toán 26.** Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC.

Chứng minh rằng  $AB + AC = 2(R + r)$

**Lời giải**

Dễ thấy AFID là hình chữ nhật (có 3 góc vuông)

Lại có  $AD = AF$  nên AFID là hình vuông

$$\Rightarrow AD = AF = ID = r$$

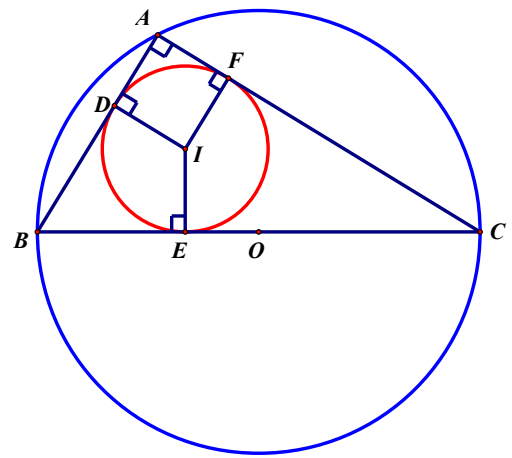
Ta có  $BD = BE$  và  $CE = CF$

$$\Rightarrow AB + AC = AD + BD + AF + CF$$

$$= AD + AF + BD + CF$$

$$= 2r + 2R$$

$$= 2(r + R)$$



**Bài toán 27.** Cho nửa đường tròn (O ; R) đường kính AB. Từ A và B vẽ hai tiếp tuyến Ax và By. Một điểm M di động trên nửa đường tròn này qua M vẽ tiếp tuyến thứ ba cắt Ax và By lần lượt tại C và D. Hãy xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn (O ; R) sao cho  $AC + BD$  nhỏ nhất.

**Lời giải**

Kẻ  $AE \parallel CD$  (E thuộc By)

Dễ thấy tứ giác ACDE là hình bình hành

$$\Rightarrow AE = CD \text{ mà } AC = MC \text{ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)}$$

$$\text{Tương tự } BD = MD \text{ nên } AC + BD = MC + MD = CD$$

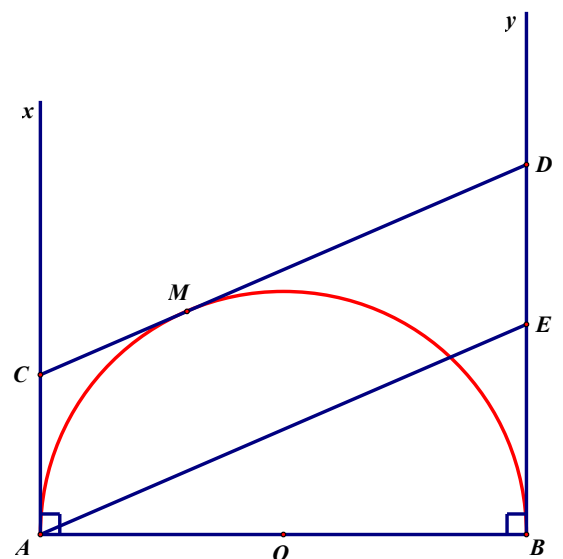
Lại có  $AE \geq AB$

$$\Rightarrow AC + BD \geq AB \text{ (không đổi)}$$

Dấu “=” xảy ra  $\Leftrightarrow E$  trùng với B

$$\Leftrightarrow CD \parallel AB \Leftrightarrow OM \perp AB.$$

Vậy khi M là giao điểm của đường thẳng vuông góc với AB thì  $AC + BD$  nhỏ nhất.



**Bài toán 28.** Cho nửa đường tròn (O ; R) đường kính AB. Từ A và B vẽ hai tiếp tuyến Ax và By. Một điểm M di động trên nửa đường tròn này, qua M vẽ tiếp tuyến thứ ba cắt Ax và By lần lượt tại C và

D. Hãy xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn (O ; R) sao cho  $3AC + BD$  nhỏ nhất.

**Lời giải**

Ta có CM và CA là hai tiếp tuyến nên  $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$

Tương tự  $\widehat{O_3} = \widehat{O_4}$

Mà  $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} + \widehat{O_3} + \widehat{O_4} = 180^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{O_2} + \widehat{O_3} = 90^\circ$$

Hay tam giác COD vuông tại O

CD là tiếp tuyến tại M nên  $CD \perp OM$

Xét  $\triangle CMO$  và  $\triangle OMD$  có:

$\widehat{CMO} = \widehat{DMO} = 90^\circ$ ,  $\widehat{O_2} = \widehat{CDO}$  (cùng phụ với góc DCO)

Nên  $\triangle CMO \sim \triangle OMD$  (g.g)

$$\Rightarrow \frac{CM}{OM} = \frac{OM}{MD}$$

$$\Rightarrow CM \cdot DM = OM^2 = R^2 \text{ (không đổi)}$$

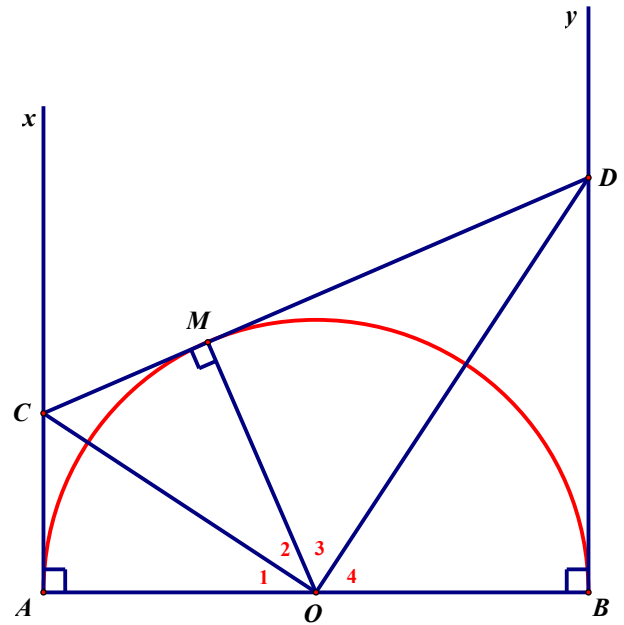
$$\text{Mà } CM = AC, DM = BD \Rightarrow AC \cdot BD = R^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta có:  $\frac{3AC + BD}{2} \geq \sqrt{3 \cdot AC \cdot BD}$

$$\Leftrightarrow 3AC + BD \geq 2\sqrt{3 \cdot AC \cdot BD} \Leftrightarrow 3AC + BD \geq 2\sqrt{3} \cdot R$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow 3AC = BD = \sqrt{3} \cdot R \Leftrightarrow \widehat{AOC} = 30^\circ \Leftrightarrow \widehat{AOM} = 60^\circ$$

Vậy M di động ở trên (O) sao cho  $\widehat{AOM} = 60^\circ$  thì  $3AC + BD$  nhỏ nhất.



**Bài toán 29.** Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. M là điểm bất kì thuộc nửa đường tròn, kẻ MH vuông góc với AB (H thuộc AB). Vẽ đường tròn tâm M bán kính MH. Kẻ các tiếp tuyến AC, BD với đường tròn tâm M (C, D là các tiếp điểm).

a) Chứng minh ba điểm C, M, D thẳng hàng và CD là tiếp tuyến của (O).

b) Chứng minh rằng khi M di chuyển trên nửa đường tròn (O) thì  $AC + BD$  không đổi.

**Lời giải**



Xét  $\triangle ABO$  và  $\triangle HBO$  có:  $\widehat{ABO} = \widehat{BOH} = 90^\circ$ ,  $\widehat{AOB}$  chung

$$\text{Do đó } \triangle ABO \sim \triangle HBO \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{OB}{OH} = \frac{OA}{OB} \Rightarrow OA.OH = OB^2 = R^2$$

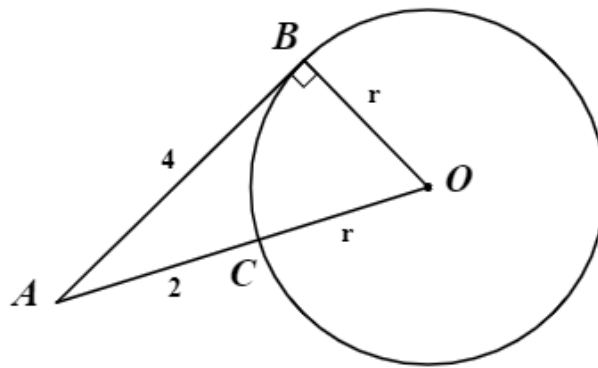
Do đó  $ON = \frac{R^2}{OI}$  (không đổi),  $d$  cho trước,  $O$  cố định  $\Rightarrow I$  cố định  $\Rightarrow N$  cố định.

### III. Tính toán

**Bài toán 31.** Trong hình vẽ,  $AB$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  tại  $B$ .

- Tính bán kính  $r$  của đường tròn  $(O)$ .
- Tính chiều dài cạnh  $OA$  của tam giác  $ABO$ .

**Lời giải**



a)  $AB$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  tại  $B \Rightarrow AB \perp OB$ . Xét tam giác  $ABO$  vuông tại  $B$ , theo định lý Pythagore:  $OA^2 = OB^2 + AB^2$  hay  $(r+2)^2 = r^2 + 4^2$

$$\Rightarrow r^2 + 4r + 4 = r^2 + 16$$

$$\Rightarrow 4r = 16 - 4 = 12$$

$$\Rightarrow r = 3$$

Vậy bán kính của đường tròn  $(O)$  là  $r = 3$ .

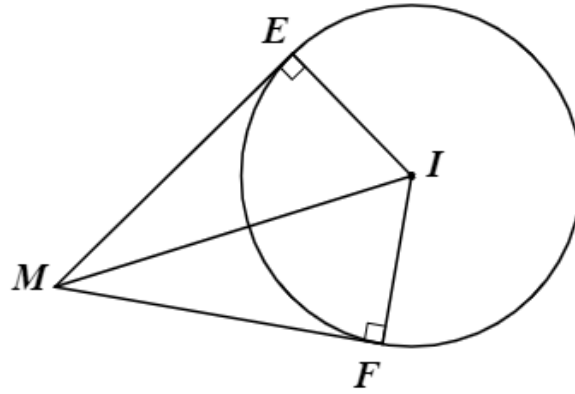
b)  $OA = OC + AC = r + 2 \Rightarrow OA = 3 + 2 = 5$ .

**Bài toán 32.** Cho điểm  $M$  nằm ngoài đường tròn  $(I; 6 \text{ cm})$  và  $ME$ ,  $MF$  là hai tiếp tuyến của đường tròn này tại  $E$  và  $F$ . Cho biết  $\widehat{EMF} = 60^\circ$ .

a) Tính số đo  $\widehat{EMI}$  và  $\widehat{FMI}$ .

b) Tính độ dài  $MI$ .

**Lời giải**



a) Ta có  $MI$  là đường phân giác của góc  $EMF$  (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$$\Rightarrow \widehat{EMI} = \widehat{FMI} = \frac{\widehat{EMF}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

Xét tứ giác  $MEIF$  có:  $\widehat{MEI} = \widehat{MFI} = 90^\circ$  (tính chất của tiếp tuyến)

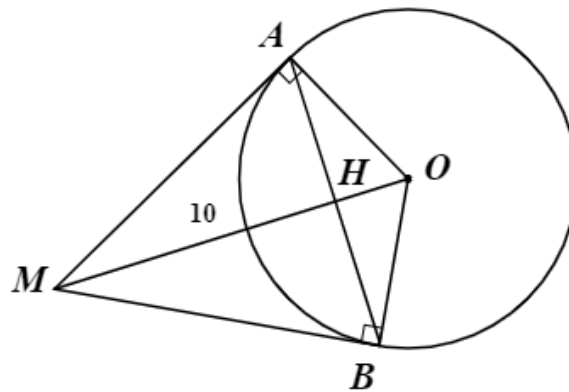
$$\Rightarrow \widehat{EIF} = 360^\circ - (\widehat{MEI} + \widehat{MFI} + \widehat{EMF}) = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 60^\circ) = 120^\circ$$

b) Xét tam giác  $MEI$  vuông tại  $E$  có  $\widehat{EMI} = 30^\circ$  (cmt)

$$\Rightarrow MI = 2EI = 2.6 = 12 \text{ (cm)}.$$

**Bài toán 33.** Cho đường tròn  $(O; 6 \text{ cm})$ .  $M$  nằm ngoài đường tròn sao cho  $OM = 10 \text{ cm}$ . Từ  $M$  kẻ hai tiếp tuyến  $MA, MB$  đến đường tròn ( $A, B$  là hai tiếp điểm). Tính độ dài các cạnh của tam giác  $MAB$ .

**Lời giải**



$\Delta MAO$  vuông tại  $A$  (tính chất tiếp tuyến)

Theo định lý Pythagore  $MA^2 = MO^2 - OA^2$

$$MA^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \Rightarrow MA = 8 \text{ (cm)}$$

Ta có  $MB = MA = 8 \text{ (cm)}$  (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Để thấy  $MO$  là đường trung trực của  $AB$  ( $OA = OB$ ,  $MA = MB$ )  $\Rightarrow MO \perp AB$  tại  $H$ .

Xét  $\Delta MAO$  và  $\Delta AHO$  có:  $\widehat{MAO} = \widehat{AHO} = 90^\circ$ ,  $\widehat{MOA}$  chung

$$\text{Do đó } \triangle MAO \sim \triangle AHO \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MO}{AO} = \frac{AO}{HO} \Rightarrow AO^2 = MO \cdot HO$$

$$\Rightarrow HO = \frac{AO^2}{MO} = \frac{6^2}{10} = 3,6 \text{ (cm)}$$

$$\Rightarrow HM = MO - HO = 10 - 3,6 = 6,4 \text{ (cm)}$$

Chứng minh tương tự, ta có:  $\triangle AHM \sim \triangle OHA$  (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AH}{MH} = \frac{HO}{AH} \Rightarrow AH^2 = MH \cdot HO = 6,4 \cdot 3,6$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{6,4 \cdot 3,6} \approx 4,8 \text{ (cm)}$$

Vì  $MO$  là đường trung trực của  $AB$  (cmt)  $\Rightarrow HA = HB = 4,8$  (cm)

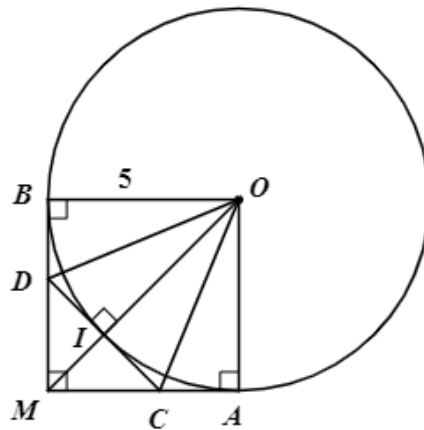
$$\Rightarrow AB = HA + HB = 4,8 + 4,8 = 9,6 \text{ (cm)}$$

**Bài toán 34.** Cho đường tròn  $(O; 5 \text{ cm})$ . Điểm  $M$  nằm ngoài  $(O)$  sao cho hai tiếp tuyến  $MA$  và  $MB$  ( $A, B$  là hai tiếp điểm) vuông góc với nhau tại  $M$ .

a) Tính độ dài của  $MA$  và  $MB$ .

b) Qua giao điểm  $I$  của đoạn thẳng  $MO$  và đường tròn  $(O)$ , vẽ một tiếp tuyến cắt  $MA, MB$  lần lượt tại  $C, D$ . Tính độ dài của  $CD$ .

**Lời giải**



a) Dễ thấy tứ giác  $MBOA$  là hình chữ nhật (có ba góc vuông)

Lại có  $MA = MB$  (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Nên  $MBOA$  là hình vuông (hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông)

$$\Rightarrow MA = MB = 5 \text{ cm.}$$

b)  $DB$  và  $DI$  là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn  $(O)$  nên  $OD$  là tia phân giác của

$$\widehat{MOB} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{DOB} = \widehat{DOI} = \frac{45^\circ}{2} = 22,5^\circ.$$

Xét tam giác  $DBO$  vuông tại  $B$ , có  $\widehat{DOB} = 22,5^\circ$  và cạnh góc vuông  $OB = 5 \text{ cm}$ .

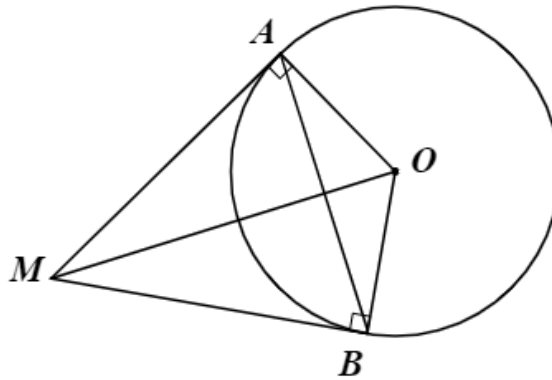
Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$BD = OB \cdot \tan \widehat{DOB} = 5 \cdot \tan 22,5^\circ \approx 2,1 \text{ (cm)} \Rightarrow DI = DB \approx 2,1 \text{ (cm)}$  (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

Ta có  $MD = MC$  (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

Tam giác  $DMC$  cân có  $MI$  là đường cao nên đồng thời là trung tuyến. Hay  $IC = DI \approx 2,1 \text{ (cm)}$   
 $\Rightarrow CD = 2 \cdot 2,1 \approx 4,2 \text{ (cm)}$

**Bài toán 35.** Cho đường tròn  $(O)$ , điểm  $M$  nằm ngoài  $(O)$  sao cho  $MA$  và  $MB$  là hai tiếp tuyến ( $A, B$  là hai tiếp điểm) thỏa mãn  $\widehat{AMB} = 60^\circ$ . Biết chu vi tam giác  $MAB$  là  $18 \text{ cm}$ , tính độ dài dây  $AB$ .



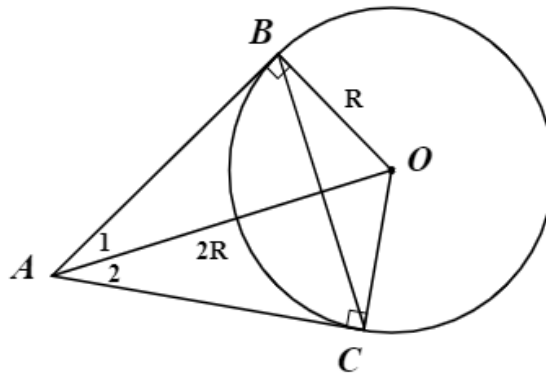
**Lời giải**

Ta có  $MA = MB$  (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) nên tam giác  $AMB$  cân tại  $M$  có  $\widehat{AMB} = 60^\circ \text{ (gt)}$  nên tam giác  $AMB$  đều  $\Rightarrow MA = MB = AB$  mà

$$MA + MB + AB = 18 \text{ (cm)} \Rightarrow AB = \frac{18}{3} = 6 \text{ (cm)}$$

**Bài toán 36.** Cho điểm  $A$  nằm ngoài đường tròn  $(O; R)$  với  $OA = 2R$ . Vẽ hai tiếp tuyến  $AB, AC$  đến đường tròn ( $B, C$  là tiếp điểm). Chứng minh rằng  $\triangle ABC$  đều và tính các cạnh của nó theo  $R$ .

**Lời giải**



$\triangle ABO$  vuông tại  $B$  (tính chất tiếp tuyến)

$$\text{Ta có } \sin A_1 = \frac{OB}{OA} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{A_1} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ$$

$$AB^2 = AO^2 - OB^2 = (2R)^2 - R^2 = 3R^2 \Rightarrow AB = R\sqrt{3}$$

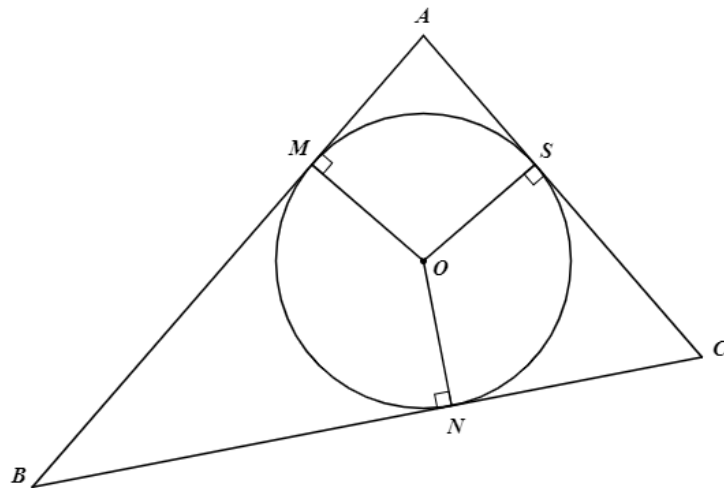
$\triangle ABC$  cân (tính chất tiếp tuyến cắt nhau) có  $\widehat{BAC} = 60^\circ$  nên là tam giác đều  
 $\Rightarrow AC = BC = AB = R\sqrt{3}$ .

**Bài toán 37.** Cho đường tròn  $(O)$  nội tiếp  $\triangle ABC$ , các tiếp điểm trên các cạnh  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  lần lượt là  $M$ ,  $N$  và  $S$ .

a) Chứng minh rằng:  $AB + AC - BC = 2AM$ .

b) Cho  $AB = 4\text{ cm}$ ,  $BC = 7\text{ cm}$  và  $CA = 5\text{ cm}$ . Tính các đoạn thẳng  $AM$ ,  $BM$  và  $CS$ .

**Lời giải**



a) Ta có  $AB + AC - BC = AM + MB + AS + SC - BN - NC$   
 $= AM + AS = 2AM$

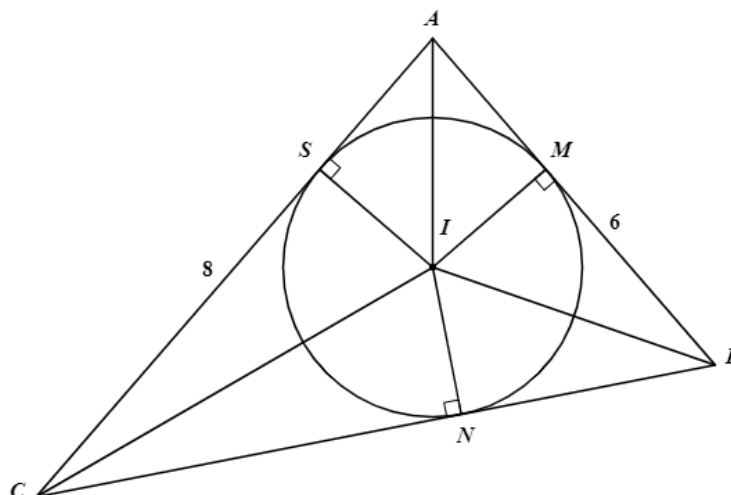
b) Theo câu a ta có:  $AB + AC - BC = 2AM$

$$\Rightarrow AM = \frac{AB + AC - BC}{2}$$

$$BM = 4 - 1 = 3; AS = AM = 1 \Rightarrow SC = 5 - 1 = 4$$

**Bài toán 38.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 6\text{ cm}$ ,  $AC = 8\text{ cm}$ . Gọi  $I$  là tâm của đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ . Tính bán kính của đường tròn tâm  $I$ .

**Lời giải**



Ta có tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  (gt) Theo định lí Pythagore:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ (cm)}$$

Gọi  $S_{ABC}$  là diện tích tam giác  $ABC$

$$\text{Ta có } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Gọi bán kính đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$  là  $r$

$$\text{Ta có } S_{ABC} = S_{AIB} + S_{BIC} + S_{CIA} = \frac{1}{2} r \cdot AB + \frac{1}{2} r \cdot BC + \frac{1}{2} r \cdot AC$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} r (AB + BC + AC)$$

$$\Rightarrow 24 \cdot 2 = r (AB + BC + AC)$$

$$\Rightarrow r = \frac{48}{AB + BC + AC} = \frac{48}{6 + 8 + 10} = 2$$

Vậy bán kính đường tròn tâm  $I$  nội tiếp  $\triangle ABC$  là  $r = 2 \text{ (cm)}$ .

**Nhận xét:** Theo bài toán 36 trên. Gọi  $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ ,  $S_{ABC}$

là diện tích và nửa chu vi là  $p = \frac{AB + AC + BC}{2}$  thì  $r = \frac{S}{p}$

**Bài toán 39.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  có  $AB = AC = 10 \text{ cm}$ ,  $BC = 12 \text{ cm}$  và  $I$  là tâm của đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ . Tính bán kính của đường tròn ( $I$ ).

Hướng dẫn: Theo bài 36. Để tính bán kính đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$  ta tính diện tích của tam giác ( $S$ ) và nửa chu vi ( $p$ ).

### Lời giải

$\triangle ABC$  cân tại  $A$ , kẻ đường cao  $AH$  ta có  $AH$  đồng thời là đường trung tuyến

$$HB = HC = \frac{BC}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ (cm)} \text{ Theo định lí}$$

Pythagore:

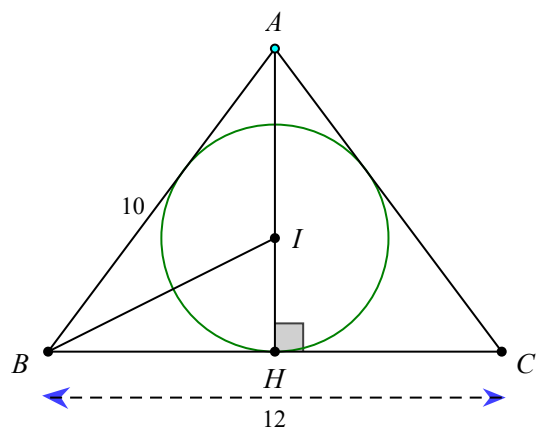
$$AH^2 = AB^2 - HB^2 = 10^2 - 6^2$$

$$\Rightarrow AH = 8 \text{ (cm)}.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$P = \frac{AB + AC + BC}{2} = 16 \text{ (cm)}.$$

$$\text{Vậy } r = \frac{48}{16} = 3 \text{ (cm)}.$$



Cách khác:

$\triangle ABC$  cân nên đường cao  $AH$  cũng đồng thời là đường phân giác,  $I$  là tâm của đường tròn nội tiếp nên  $CI$  là phân giác của  $\triangle AHC$ .

$$\text{Ta có } \frac{IA}{IH} = \frac{CA}{CH} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{IA}{5} = \frac{IH}{3} = \frac{IA+IH}{5+3} = \frac{AH}{8} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{IH}{3} = 1 \Rightarrow IH = 3(\text{cm}).$$

Vậy bán kính đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$  là  $3(\text{cm})$ .

**Chú ý:** Đối với một tam giác tùy ý ta có thể chứng minh công thức diện tích sau đây:

$S = p.r$  ( $p = \frac{a+b+c}{2}$ : nửa chu vi,  $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác,  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của tam giác) (Xem cách chứng minh bài toán 36).

**Bài toán 40.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  có  $AB = AC = 13\text{cm}$ ,  $BC = 10\text{cm}$ . Gọi  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Tính bán kính của đường tròn  $(O)$ .

### Lời giải

Kẻ đường kính  $AD$  cắt  $BC$  tại  $H$  ta có

$$HB = HC = \frac{BC}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

Theo định lý Pythagore  $AB^2 = AH^2 + BH^2$

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 13^2 - 5^2 \Rightarrow AH = \sqrt{13^2 - 5^2}$$

$$\Rightarrow AH = 12(\text{cm}).$$

Xét tam giác  $ABD$  có  $BO$  là đường trung tuyến mà

$$BO = AO = DO \text{ hay } BO = \frac{1}{2}AD \text{ nên tam giác } ABD$$

vuông tại  $B$ .

Xét  $\triangle ABD$  và  $\triangle AHB$  có:  $\widehat{BAD}$  chung và

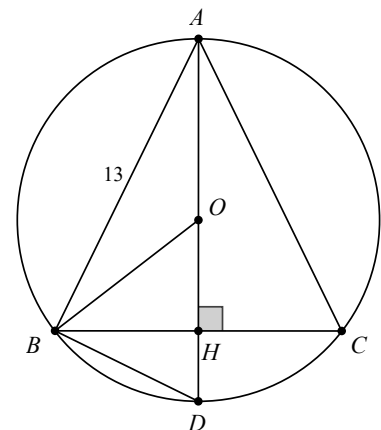
$$\widehat{ABD} = \widehat{AHB} = 90^\circ$$

Do đó  $\triangle ABD \sim \triangle AHB$  (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD.AH$$

$$\Rightarrow AD = \frac{AB^2}{AH} = \frac{13^2}{12} = 14,1(\text{cm})$$

Vậy bán kính đường tròn  $(O)$  ngoại tiếp  $\triangle ABC$ :  $R = \frac{14,1}{2} = 7,05(\text{cm})$ .



**Bài toán 41.** Quan sát hình vẽ. Biết  $AB, AC$  lần lượt là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  tại  $B, C$ . Tính giá trị của  $x$ .

**Lời giải**

Ta có:  $AB = AC$

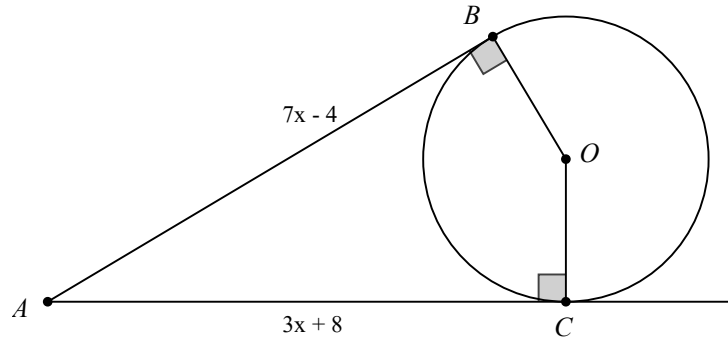
(tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$$\text{Hay } 7x - 4 = 3x + 8$$

$$\Rightarrow 7x - 3x = 8 + 4$$

$$\Rightarrow 4x = 12$$

$$\Rightarrow x = 3.$$



**Bài toán 42.** Từ điểm  $M$  nằm ngoài đường tròn  $(O)$ ,  $MO = 13\text{cm}$ , vẽ hai tiếp tuyến  $MA, MB$  ( $A, B$  là các tiếp điểm).

Tính độ dài  $MA, MB$ .

Cho  $C$  là điểm bất kì thuộc đường tròn  $(O)$  và nằm trong góc  $AOB$ . Tiếp tuyến tại  $C$  của đường tròn cắt  $MA$  tại  $N$  và cắt  $MB$  tại  $P$ . Tính chu vi tam giác  $MNP$ .

**Lời giải**

Ta có:  $MA \perp OA$  (tính chất tiếp tuyến) hay tam giác  $MAO$  vuông tại  $A$ .

Theo định lý Pythagore, ta có:

$$MO^2 = MA^2 + OA^2 \Rightarrow MA^2 = MO^2 - OA^2 = 13^2 - 5^2$$

$$\Rightarrow MA = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12(\text{cm})$$

Vậy  $MB = MA = 12(\text{cm})$  (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

Gọi  $p$  là chu vi của tam giác  $MNP$ , ta có:

$$p = MN + NC + CP + MP$$

mà  $NC = NA$  (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Tương tự  $CP = PB$

$$\Rightarrow p = (MN + NA) + (PB + MP)$$

$$= MA + MB = 12 + 12 = 24(\text{cm})$$

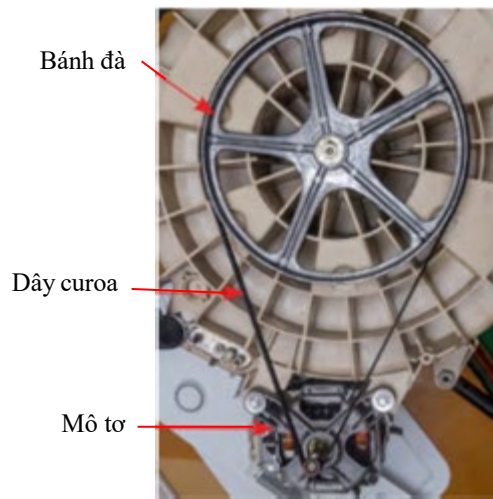
Vậy chu vi tam giác  $MNP$  bằng  $24(\text{cm})$ .

### III. TOÁN THỰC TẾ

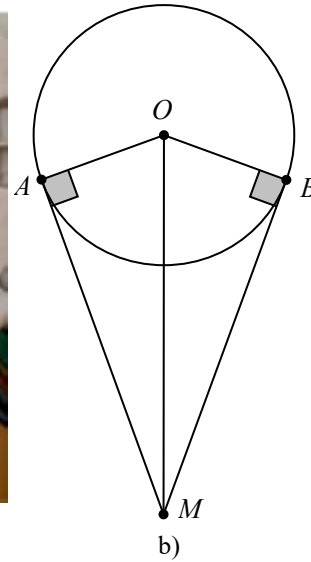
**Bài toán 43.** Bánh đà của một động cơ được thiết kế có dạng là một đường tròn tâm  $O$ , bán kính  $15\text{cm}$  được kéo bởi một dây curoa. Trục quay của mô tơ truyền lực được biểu diễn bởi điểm  $M$  (hình vẽ). Cho biết khoảng cách  $OM$  là  $35\text{cm}$ .

Tính độ dài của hai đoạn dây curoa  $MA$  và  $MB$  (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Tính số đo  $\widehat{AMB}$  tạo bởi hai tiếp tuyến  $AM, AB$  và số đo  $\widehat{AOB}$  (kết quả làm tròn đến phút).



a)



b)

### Lời giải

Xem hình vẽ.

Ta có  $MA = MB$  (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$MA$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$

$\Rightarrow MA \perp OA$  hay tam giác  $OAM$  vuông tại  $A$ .

Theo định lý Pythagore, ta có:

$$MO^2 = MA^2 + OA^2 \Rightarrow MA^2 = MO^2 - OA^2 = 35^2 - 15^2$$

$$\Rightarrow MA = \sqrt{35^2 - 15^2} \approx 31,6 (cm)$$

Vậy  $MA = MB \approx 31,6 cm$ .

Tam giác vuông  $OAM$  có cạnh huyền  $MO = 35 cm$ , cạnh góc vuông  $OA = 15 cm$ .

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$OA = OM \cdot \sin \widehat{AMO}$$

$$\Rightarrow \sin \widehat{AMO} = \frac{OA}{OM} = \frac{15}{35} \Rightarrow \widehat{AMO} = 25^\circ 23'$$

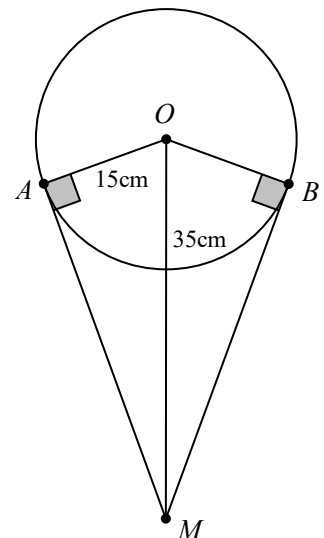
Vì  $MO$  là tia phân giác của góc  $AMB$

$$\Rightarrow \widehat{AMB} = 2 \cdot 25^\circ 23' = 50^\circ 46'$$

Xét tứ giác  $MAOB$ , ta có:

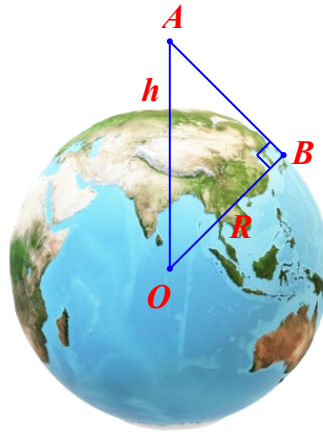
$$\widehat{AOB} = 360^\circ - (\widehat{MAO} + \widehat{MBO} + \widehat{AMB})$$

$$\widehat{AOB} = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 50^\circ 46') = 129^\circ 32'$$



**Bài toán 44.** Trong hình vẽ, mặt cắt của Trái Đất có thể xem là đường tròn tâm  $O$  bán kính  $R = 6400 km$ . Từ điểm  $A$  nằm ở độ cao  $h$  so với mực nước biển, một người có thể thấy xa nhất đến điểm  $B$  trên  $(O)$  sao cho  $AB$  là tiếp tuyến của  $(O)$ . Khoảng cách  $AB$  khi đó được gọi là tầm nhìn xa từ điểm  $A$ . Tính  $AB$  nếu  $h = 20 m$ .

### Lời giải



Đổi:  $h = 20m = 0,02km$

Vì  $AB$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O; 6400km)$  nên  $AB \perp OB$ .

Tam giác  $ABO$  vuông tại  $B$ , có cạnh huyền  $OA = R + h$  và cạnh góc vuông  $OB = R$ . Trong đó  $R = 6400km$ .

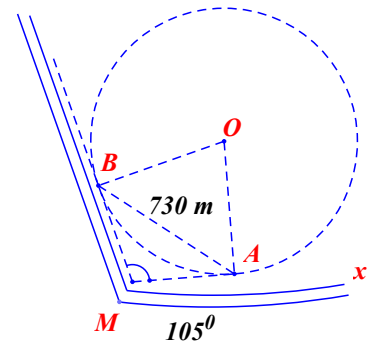
Theo định lý Pythagore, ta có:

$$OA^2 = OB^2 + AB^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = OA^2 - OB^2 = (R + h)^2 - R^2 = (6400 + 0,02)^2 - 6400^2$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(6400 + 0,02)^2 - 6400^2} = 16(km)$$

**Bài toán 45.** Trong hình vẽ, để tàu không trật bánh ray khi chuyển hướng từ đường ray thẳng  $XA$  sang đường ray thẳng  $YB$ , đoạn dây nối được thiết kế là một phần của đường tròn  $(O)$  tiếp xúc với  $XA$  tại  $A$  và  $BY$  tại  $B$ . Biết góc chuyển hướng của tàu là  $\widehat{AMB} = 105^\circ$  và khoảng cách giữa hai điểm  $A$  và  $B$  là  $730m$ . Tính bán kính của đường tròn  $(O)$ , làm tròn kết quả đến đơn vị mét.



### Lời giải

Ta có  $OA = OB = R$ ;  $MA = MB$  (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) nên  $MO$  là đường trung trực của đoạn  $AB$ .

Gọi  $I$  là giao điểm của  $MO$  và  $AB$ , ta có  $I$  là trung điểm của đoạn  $AB$  hay  $IA = IB = \frac{AB}{2} = \frac{730}{2} = 365(m)$ .

Xét tứ giác  $AOBM$  có:

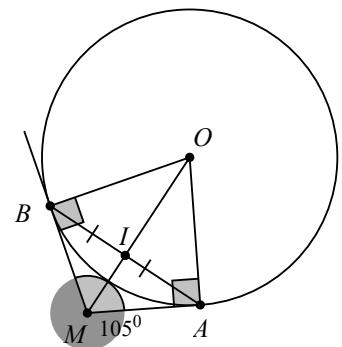
$$\begin{aligned} \widehat{AOB} &= 360^\circ - (\widehat{OBM} + \widehat{AMB} + \widehat{OAM}) \\ &= 360^\circ - (90^\circ + 105^\circ + 90^\circ) = 75^\circ \end{aligned}$$

Lại có  $MO$  là tia phân giác của góc  $AOB$  (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

$$\Rightarrow \widehat{AOI} = \widehat{BOI} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \frac{75^\circ}{2} = 37,5^\circ$$

Vì  $MO$  là đường trung trực của  $AB$  (cmt)  $\Rightarrow MO \perp AB$  tại  $I$ .

Xét tam giác  $AOI$  vuông tại  $I$  có cạnh góc vuông  $IA = 365(m)$ , góc nhọn  $\widehat{AOI} = 37,5^\circ$ .



Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$IA = OA \cdot \sin \widehat{AOI}$$

$$\Rightarrow OA = \frac{IA}{\sin \widehat{AOI}} = \frac{365}{\sin 37,5^\circ} \approx 599(m)$$

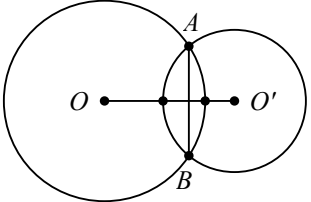
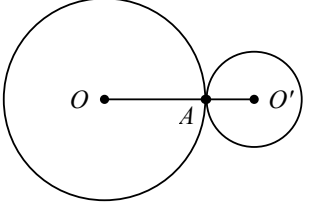
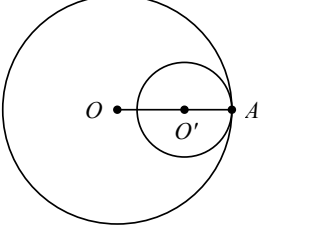
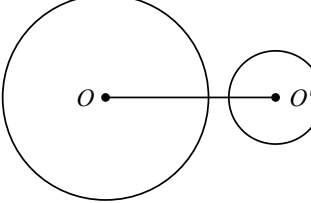
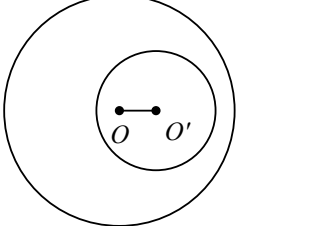
Vậy bán kính đường tròn  $(O)$  là  $599m$ .

## BÀI 17. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

### PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

**Nhận xét:** Bảng tóm tắt vị trí tương đối của hai đường tròn phân biệt  $(O; R)$  và  $(O'; R')$  với  $R \geq R'$

**BẢNG TỔNG KẾT**

| Vị trí tương đối                               | Số điểm chung | Hệ thức liên hệ         | Hình ảnh                                                                              |
|------------------------------------------------|---------------|-------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| Hai đường tròn cắt nhau                        | 2             | $R - R' < OO' < R + R'$ |    |
| Hai đường tròn tiếp xúc ngoài                  | 1             | $OO' = R + R'$          |    |
| Hai đường tròn tiếp xúc trong                  | 1             | $OO' = R - R'$          |   |
| Hai đường tròn ở ngoài nhau                    | 0             | $OO' > R + R'$          |  |
| Đường tròn $(O; R)$ đựng đường tròn $(O'; R')$ | 0             | $OO' < R - R'$          |  |

### PHẦN B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

#### I. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn

**Bài toán 1.** Cho hai điểm  $O$  và  $O'$  cách nhau một khoảng 5 cm. Mỗi đường tròn sau đây có vị trí tương đối như thế nào đối với đường tròn  $(O; 3cm)$ .

- a) Đường tròn  $(O'; 3cm)$    b) Đường tròn  $(O'; 1cm)$   
 b) Đường tròn  $(O'; 8cm)$

**Lời giải**

a) Đặt  $R = 3cm, R' = 3cm$

Ta có:  $3 - 3 < 5 < 3 + 3$

$$R - R' < OO' < R + R' \text{ hay } 0 < 5 < 6$$

Do đó hai đường tròn  $(O; 3cm)$  và  $(O'; 3cm)$  cắt nhau.

b) Đặt  $R = 3cm, R' = 1cm$

Ta có:  $5 > 3 + 1$

$$OO' > R + R'$$

Do đó hai đường tròn  $(O; 3cm)$  và  $(O'; 1cm)$  ở ngoài nhau.

c) Đặt  $R = 3cm, R' = 8cm$

Ta có:  $5 = 8 - 3$  hay  $OO' = R' - R$

Do đó hai đường tròn  $(O; 3cm)$  và  $(O'; 8cm)$  tiếp xúc nhau.

**Bài toán 2.** Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; R')$  trong mỗi trường hợp sau:

a)  $OO' = 12; R = 5; R' = 3$ ; b)  $OO' = 8; R = 5; R' = 3$ ;

c)  $OO' = 7; R = 5; R' = 3$ ; d)  $OO' = 0; R = 5; R' = 4$ ;

e)  $OO' = 3; R = 4; R' = 7$ .

**Lời giải**

a) Ta có:  $12 > 5 + 3$  hay  $OO' > R + R'$ .

Do đó hai đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; R')$  ở ngoài nhau.

b) Ta có:  $8 = 5 + 3$  hay  $OO' = R + R'$ .

Do đó hai đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; R')$  tiếp xúc ngoài.

c) Ta có:  $5 - 3 < 7 < 5 + 3$  hay  $R - R' < OO' < R + R'$ .

Do đó hai đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; R')$  cắt nhau.

d) Ta có:  $0 < 5 - 4$  hay  $OO' < R - R'$ .

Do đó hai đường tròn  $(O; R)$  đựng đường tròn  $(O'; R')$ .

e) Ta có:  $3 = 7 - 4$  hay  $OO' = R' - R$ .

Do đó hai đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; R')$  tiếp xúc trong.

**Bài toán 3.** Cho hai điểm  $O$  và  $O'$  sao cho  $OO' = 3cm$ . Mỗi đường tròn sau đây có vị trí tương đối như thế nào đối với đường tròn  $(O; 3cm)$ .

**Lời giải**

Đặt  $R = 8cm, R' = 5cm$

Ta có:  $3cm = 8cm - 5cm$  hay  $OO' = R - R'$

Vậy hai đường tròn đã cho tiếp xúc trong với nhau.

**Bài toán 4.** Xác định vị trí của hai đường tròn  $(O; 3cm)$  và  $(O'; 2cm)$  biết  $OO' > 5cm$ .

**Lời giải**

Đặt  $R = 3cm, R' = 2cm$

Ta có:  $OO' = 5 > R + R'$

Do đó hai đường tròn  $(O; 3cm)$  và  $(O'; 2cm)$  hai đường tròn ở ngoài nhau.

**Bài toán 5.** Cho hai điểm  $O$  và  $O'$  sao cho  $OO' = 2cm$ . Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn  $(O; 5cm)$  và  $(O'; r)$  biết rằng  $r < 3cm$ .

**Lời giải**

Đặt  $R = 8cm$  và đường tròn tâm  $O'$  có bán kính  $r < 3cm$ .

Ta có:  $OO' = 2 < 5 - r$  (vì  $r < 3cm$ )

Do đó đường tròn  $(O; 5cm)$  đựng đường tròn  $(O'; r)$  khi  $r < 3cm$ .

**Bài toán 6.** Cho ba điểm thẳng hàng  $O, A$  và  $O'$ . Với mỗi trường hợp sau hãy viết hệ thức giữa các độ dài  $OO', OA$  và  $O'A$  rồi xét xem hai đường tròn  $(O; OA)$  và  $(O'; O'A)$  tiếp xúc trong hay tiếp xúc ngoài với nhau; vẽ hình để khẳng định dự đoán của mình.

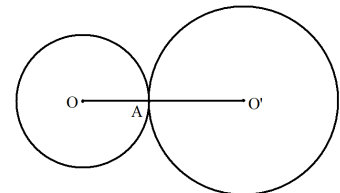
- Điểm  $A$  nằm giữa hai điểm  $O$  và  $O'$ ;
- Điểm  $O$  nằm giữa hai điểm  $A$  và  $O'$ ;
- Điểm  $O'$  nằm giữa hai điểm  $A$  và  $O$ .

**Lời giải**

- Điểm  $A$  nằm giữa hai điểm  $O$  và  $O'$ ;

Ta có:  $OO' = OA + OA'$

Hai đường tròn  $(O; OA)$  và  $(O'; O'A)$  tiếp xúc ngoài (Xem hình a)

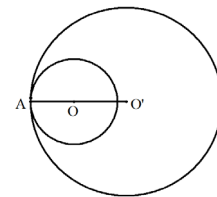


Hình a

- Điểm  $O$  nằm giữa hai điểm  $A$  và  $O'$ .

Ta có:  $OO' = O'A - OA$

Hai đường tròn  $(O; OA)$  và  $(O'; O'A)$  tiếp xúc trong (Xem hình b)

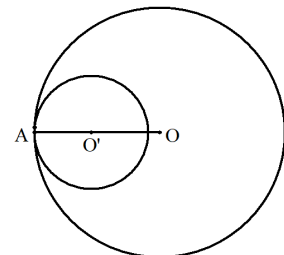


Hình b

- Điểm  $O'$  nằm giữa hai điểm  $A$  và  $O$ .

Ta có:  $OO' = OA - O'A$

Hai đường tròn  $(O; OA)$  và  $(O'; O'A)$  tiếp xúc trong (Xem hình c)



Hình c

**Bài toán 7.** Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  tiếp xúc ngoài với nhau tại  $A$ . Một đường thẳng qua  $A$  cắt  $(O)$  tại  $B$  và  $(O')$  cắt tại  $C$ . Chứng minh rằng  $OB \parallel O'C$ .

**Lời giải**

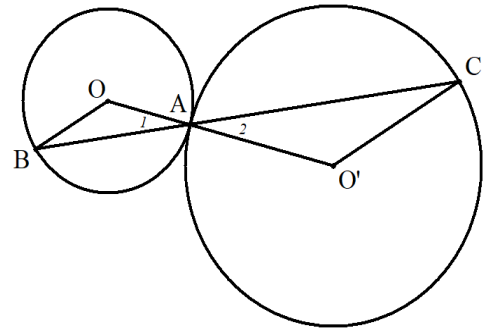
Gọi bán kính đường tròn  $(O)$  là  $R$ .

Ta có:  $OA = OB = R$  hay tam giác  $AOB$  cân tại  $O$

$$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{A_1}.$$

Tương tự, ta có tam giác  $AOC$  cân tại  $O' \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{A_2}$  mà

$$\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \text{ (đối đỉnh)}$$



Do đó  $\widehat{B} = \widehat{C} \Rightarrow OB \parallel O'C$  (cặp góc so le trong bằng nhau).

**Bài toán 8.** Cho nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ . Trên cùng nửa mặt phẳng bờ  $AB$ , vẽ nửa đường tròn tâm  $O'$  đường kính  $OA$ .

a) Xác định vị trí tương đối của đường tròn  $(O)$  và đường tròn  $(O')$

b) Vẽ dây cung  $AC$  của nửa đường tròn  $(O)$  và nửa đường tròn  $(O')$  tại  $D$ . Chứng minh  $OC$  và  $OD$  song song với nhau.

**Lời giải**

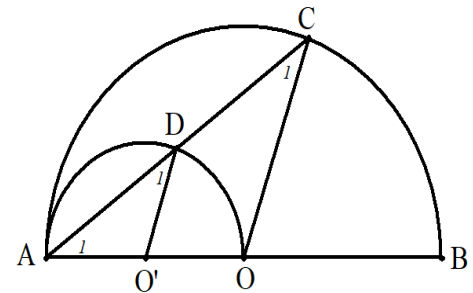
a) Ta có ba điểm  $A, O', O$  thẳng hàng và

$$OO' = OA - O'A \text{ (} d = R - R' \text{)}$$

Chứng tỏ  $(O)$  và  $(O')$  tiếp xúc trong tại  $A$ .

b) Ta có  $\triangle AO'D$  cân (vì  $O'A = O'D = R'$ )  $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{D_1}$  (1)

Tương tự  $\triangle AOC$  cân  $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{C_1}$  (2)



Từ (1) và (2) ta có  $\widehat{D_1} = \widehat{C_1} \Rightarrow OD \parallel OC$  (cặp góc đồng vị bằng nhau)

**Chú ý:** Các bạn có thể giải thêm câu c) sau đây:

Chứng minh  $D$  là trung điểm của  $AC$  và  $OD$  song song với  $BC$ .

**Hướng dẫn:**  $D$  thuộc nửa đường tròn đường kính  $AO$  nên  $\widehat{ADO} = 90^\circ$ . Khi đó  $D$  là trung điểm của  $AC$  (định lý đường kính dây cung) ta chứng minh  $OD$  là đường trung bình của  $\triangle AOC$  để suy ra  $OD \parallel BC$ .

**Bài toán 9.** Cho đoạn thẳng  $OO'$  và điểm  $A$  nằm giữa hai điểm  $O$  và  $O'$ . Vẽ đường tròn  $(O; OA)$  và đường tròn  $(O'; O'A)$ . Qua  $A$  vẽ đường thẳng cắt  $(O)$  tại  $B$  và  $(O')$  cắt tại  $C$ .

a) Chứng minh  $(O)$  và  $(O')$  tiếp xúc nhau.

b) Vẽ đường kính  $BD$  của  $(O)$  và  $CE$  của  $(O')$ , chứng minh  $D, A, E$  thẳng hàng.

**Lời giải**

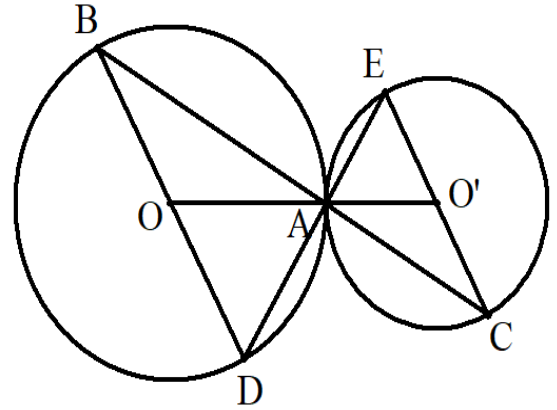
a) Ta có :  $OO' = OA + O'A (d = R + R')$

Chứng tỏ  $(O)$  và  $(O')$  tiếp xúc ngoài tại  $A$ .

b) Ta có  $BD$  là đường kính của  $(O)$  nên

$$OA = \frac{1}{2}BD \quad (1)$$

Xét  $\triangle ABD$  có  $AO$  là trung tuyến (1) nên  $\triangle ABD$  vuông tại  $A$  hay  $AD \perp AB$ , mà  $B, A, C$  thẳng hàng nên  $AD \perp BC$ , tương tự  $AE \perp BC$ .



Vì vậy  $AD$  và  $AE$  phải trùng nhau hay ba điểm  $D, A, E$  thẳng hàng.

**Bài toán 10.** Cho hình bình hành  $ABCD (AB > AD)$ . Vẽ đường tròn tâm  $A$  bán kính  $AD$ , đường tròn  $(A)$  cắt  $AB$  tại  $E$ . Vẽ đường tròn tâm  $B$  bán kính  $BE$ , đường tròn  $(B)$  cắt đường thẳng  $DE$  tại  $F$ . Chứng minh đường tròn  $(A; AD)$  và  $(B; BE)$  tiếp xúc với nhau và ba điểm  $F, B, C$  thẳng hàng.

**Lời giải**

Ta có  $AB = AE + EB (d = R + R')$

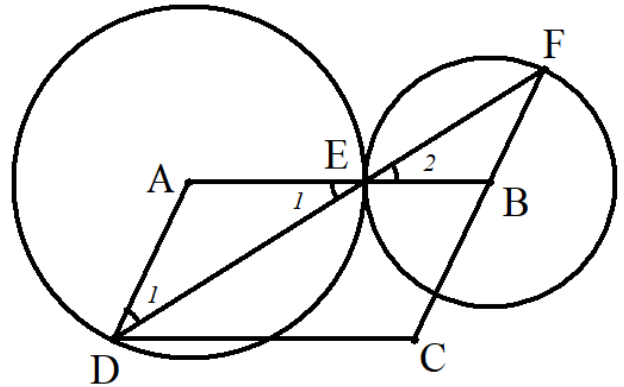
Chứng tỏ  $(A; AD)$  và  $(B; BE)$  tiếp xúc ngoài với nhau tại  $E$ .

Ta có  $\triangle ADE$  cân tại  $A (AD = AE = R)$

$$\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{E_1}$$

Tương tự  $\triangle EBF$  cân tại  $B \Rightarrow \widehat{F} = \widehat{E_2}$

mà  $\widehat{E_1} = \widehat{E_2}$  (đối đỉnh)  $\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{F}$ .



Do đó  $AD \parallel BF$ . Lại có  $AD \parallel BC (gt)$

Theo tiên đề Ô-clit:  $BF$  và  $BC$  phải trùng nhau hay  $F, B, C$  thẳng hàng.

**Bài toán 11.** Cho đường tròn  $(O)$  đường kính  $BC$ . Một dây  $AD$  vuông góc với  $BC$  tại  $H$ . Gọi  $E, F$  theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ  $H$  đến  $AB, AC$ . Gọi  $(I)$  và  $(K)$  lần lượt là các đường tròn ngoại tiếp các tam giác  $HBE$  và  $HCF$ .

Xác định vị trí tương đối của đường tròn  $(I)$  và  $(O)$ ;  $(K)$  và  $(O)$ ;  $(I)$  và  $(K)$ .

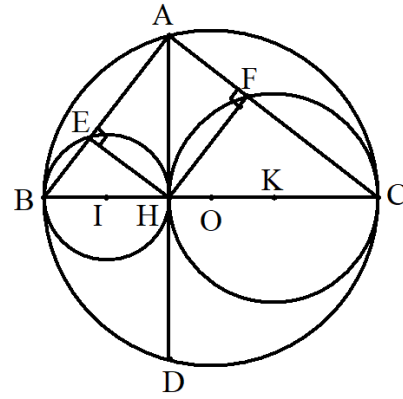
**Lời giải**

Ta có :  $OI = OB - IB$  ( $d = R - R_1$ )

Chứng tỏ  $(I)$  và  $(O)$  tiếp xúc trong.

Tương tự ta chứng minh được  $(K)$  và  $(O)$  tiếp xúc trong với nhau

Lại có:  $IK = IH + HK$  ( $d = R_1 + R_2$ ) Chứng tỏ  $(I)$  và  $(K)$  tiếp xúc ngoài với nhau.



**Bài toán 12.** Cho đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ . Một điểm  $C$  (khác  $A, B$ ) nằm trên đường tròn. Tiếp tuyến  $Cx$  của đường tròn cắt tia  $AB$  tại  $I$ , phân giác của góc  $CIA$  cắt  $OC$  tại  $O'$ .

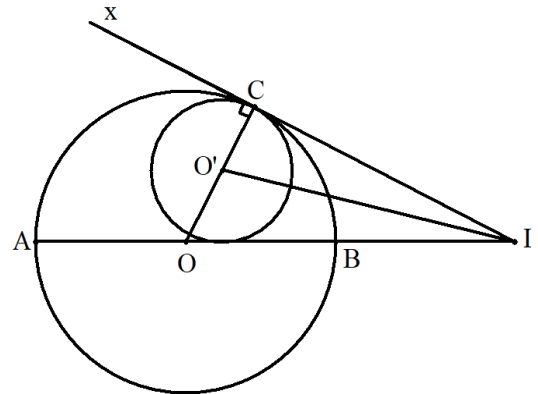
a) Xác định vị trí tương đối của đường tròn  $(O)$  và  $(O'; O'C)$ .

b) Chứng minh rằng đường tròn  $(O'; O'C)$  tiếp xúc với  $AB$ .

**Lời giải**

a) Hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  có chung điểm  $C$   
 $Cx$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  (gt)  
 $\Rightarrow OC \perp Cx$  mà  $O' \in OC \Rightarrow O'C \perp Cx$   
 Vậy  $Cx$  là tiếp tuyến chung ty đường tròn  $(O)$  và đường tròn  $(O'; O'C)$  tiếp xúc nhau tại  $C$ .

b)  $O'$  nằm trên phân giác của góc  $CIA$  nên  $O'$  cách  $IA$  một khoảng bằng  $O'C$  nên đường tròn  $(O'; O'C)$  tiếp xúc với  $AB$ .



**Bài toán 13.** Cho đường thẳng  $OO' = 13cm$ . Vẽ đường tròn  $(O; 12cm)$  và  $(O'; 5cm)$

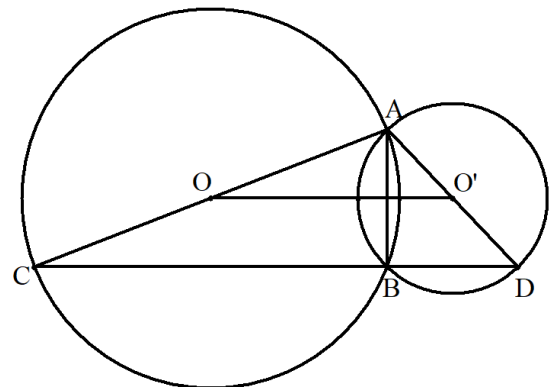
a) Xác định vị trí tương đối của đường tròn  $(O)$  và  $(O')$ .

b) Vẽ đường kính  $AC$  của  $(O)$  và  $AD$  của  $(O')$ . Chứng minh ba điểm  $C, B, D$  thẳng hàng.

**Lời giải**

a) Ta có:  $OO' < R + R' (13 < 12 + 5)$  nên đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  cắt nhau tại hai điểm phân biệt  $A$  và  $B$ .

b) Ta có  $\widehat{ABC} = 90^\circ$  ( $AC$  là đường kính)  
 Tương tự  $\widehat{ABD} = 90^\circ$ , do đó  $\widehat{ABC} + \widehat{ABD} = 180^\circ$  nên  $C, B, D$  thẳng hàng.



## II. TÍNH CHẤT

### Áp dụng tính chất hai đường tròn tiếp xúc

**Bài toán 14.** Cho đường tròn  $(O; 3cm)$  và đường tròn  $(O'; 1cm)$  tiếp xúc ngoài nhau tại  $A$ , vẽ hai bán kính  $OB$  và  $O'C$  song song với nhau và cùng thuộc nửa mặt phẳng có bờ là  $OO'$ .

a) Tính  $\widehat{BAC}$ .

b) Gọi  $I$  là giao điểm của  $BC$  và  $OO'$ . Tính  $OI$ .

**Lời giải**

a) Ta có  $OB \parallel O'C$  (gt)

$$\Rightarrow \widehat{BOA} + \widehat{CO'A} = 180^\circ$$

(cặp góc trong cùng phía)

Lại có các tam giác  $AOB$  và  $AO'C$  cân tại  $O$  và  $O'$

$$\text{nên } \widehat{A_1} = \frac{180^\circ - \widehat{BOA}}{2} \text{ và}$$

$$\widehat{A_2} = \frac{180^\circ - \widehat{CO'A}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \frac{360^\circ - (\widehat{BOA} + \widehat{CO'A})}{2} = 90^\circ$$

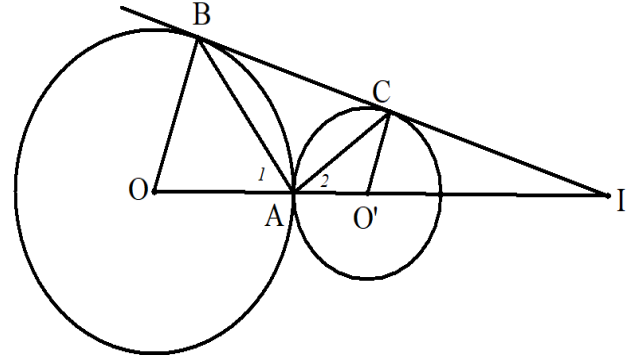
$$\Rightarrow \widehat{BAC} = 180^\circ - (\widehat{A_1} + \widehat{A_2}) = 90^\circ$$

b)  $\Delta IBO$  có  $OB \parallel O'C$  theo hệ quả của định lý Thalès:

$$\frac{IO}{IO'} = \frac{OB}{O'C} \Rightarrow \frac{IO - IO'}{IO} = \frac{OB - O'C}{OB}$$

$$\text{Hay } \frac{OO'}{IO} = \frac{OB - O'C}{OB} \Rightarrow \frac{4}{IO} = \frac{3-1}{3}$$

$$\Rightarrow IO = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6cm.$$



**Bài toán 15.** Cho đường tròn  $(O; 5cm)$  và đường tròn  $(O'; 3cm)$  tiếp xúc ngoài nhau tại  $A$ . Một đường thẳng qua  $A$  hợp với  $OO'$  một góc  $30^\circ$  cắt  $(O)$  tại  $B$  và  $(O')$  tại  $C$ .

a) Chứng minh  $\widehat{AOB} = \widehat{AO'C}$  và  $OB \parallel O'C$

b) Tiếp tuyến tại  $C$  của  $(O')$  cắt  $OO'$  tại  $D$ . Tính  $CD, O'D$ .

**Lời giải**

a)  $\Delta AOB$  cân tại  $O$  có  $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$

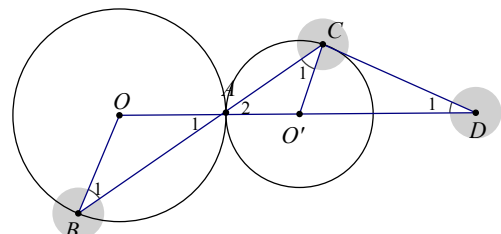
tương tự với  $\Delta AO'C$  có  $\widehat{A_2} = \widehat{C_1}$

mà  $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$  (đối đỉnh)

$$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \widehat{B_1} = \widehat{C_1}$$

$$\Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{AO'C} \text{ (hai tam giác cân có các góc ở đáy bằng nhau)}$$

và  $\widehat{B_1} = \widehat{C_1} \Rightarrow OB \parallel O'C$  (cặp góc so le trong)



b) Có  $\widehat{A}_2 = 30^\circ(\text{gt}) \Rightarrow \widehat{C}_1 = 30^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{AOC} = 180^\circ - (\widehat{A}_2 + \widehat{C}_1) = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ \Rightarrow \widehat{COD} = 60^\circ$$

Xét tam giác vuông  $CO'D$  có  $\tan \widehat{COD} = \frac{CD}{O'C}$

$$CD = O'C \tan \widehat{COD} = R \tan 60^\circ = R\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\frac{O'C}{O'D} = \cos \widehat{COD} \Rightarrow O'D = \frac{O'C}{\cos \widehat{COD}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6(\text{cm})$$

**Bài toán 16.** Cho đường tròn  $(O; R)$  đường kính  $AB$ . Gọi  $S$  là trung điểm của  $OA$  vẽ đường tròn tâm  $S$  đi qua  $A$ .

a) Chứng minh đường tròn  $(O)$  và đường tròn  $(S)$  tiếp xúc nhau tại  $A$ .

b) Một đường thẳng đi qua  $A$  cắt đường tròn  $(S)$  tại  $M$  và cắt  $(O)$  tại  $N$  ( $M, N$  khác  $A$ ) chứng minh  $SM \parallel ON$ .

c) Gọi  $I$  là trung điểm của  $ON$ , đường thẳng  $AI$  cắt  $NB$  tại  $K$ . Chứng minh rằng  $BK = 2KN$ .

**Lời giải**

a) Ta có  $SO = OA - SA (d = R - R')$

Vậy  $(O)$  và  $(S)$  tiếp xúc trong tại  $A$

b)  $\triangle ASM$  cân tại  $S \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{M}_1$  và  $\triangle AON$  cân

tại  $O \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{N}_1$

$$\Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{N}_1$$

$\Rightarrow SM \parallel ON$  (cặp góc đồng vị bằng nhau).

c) Kẻ  $OE \parallel IK$  có  $I$  là trung điểm của  $ON$

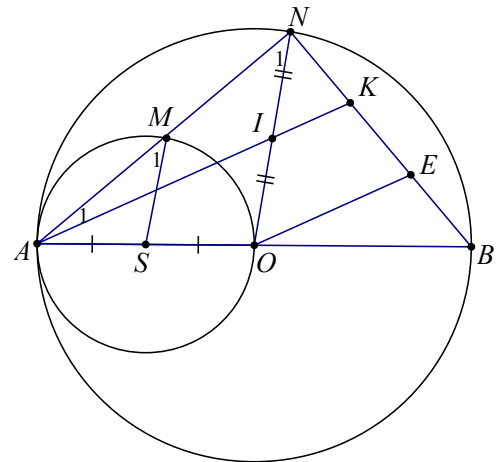
(gt)

$\Rightarrow IK$  là đường trung bình của

$$\triangle NOE \Rightarrow KN = KE$$

Mặt khác  $\triangle AKB$  có  $O$  là trung điểm của  $AB$ ,  $OE \parallel AK$  (gt)

$\Rightarrow E$  là trung điểm của  $BK$ . Do đó  $BK = 2KN$ .



**Bài toán 17.** Cho đường tròn  $(K)$  có đường kính  $BC$ . Gọi  $D$  là trung điểm của  $KC$  và  $I$  là tâm đường tròn có đường kính  $BD$ .

a) Chứng tỏ đường tròn  $(K)$  và  $(I)$  tiếp xúc nhau.

b) Qua  $B$  vẽ đường thẳng (không trùng với  $BC$ ) cắt  $(K)$  tại  $A$  và cắt  $(I)$  tại  $E$ . Chứng tỏ

$KA \parallel IE$  và tỉ số  $\frac{CA}{DE}$  không đổi.

**Lời giải**

a) Ta có  $KI = KB - IB$  ( $d = R - R'$ )

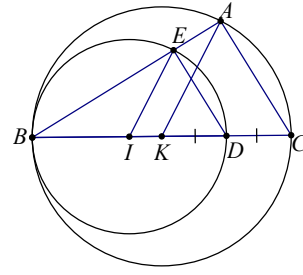
Vậy  $(K)$  và  $(I)$  tiếp xúc nhau tại  $B$ .

b) Chứng minh tương tự câu b bài toán 16

ta có:  $KA \parallel IE$

Ta có  $DE \perp BE$  ( $BD$  là đường kính)

Tương tự  $CA \perp BA \Rightarrow DE \parallel AC$ .



### \* Áp dụng tính chất hai đường tròn cắt nhau

**Bài toán 18.** Cho đường tròn  $(O; 4\text{cm})$  và  $(O'; 3\text{cm})$  và đoạn nối tâm  $OO' = 5\text{cm}$ .

a) Chứng tỏ đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  cắt nhau tại hai điểm  $A$  và  $B$ .

b) Tính độ dài  $AB$ .

c) Gọi  $AC, AD$  lần lượt là đường kính của đường tròn  $(O)$  và  $(O')$ . Chứng minh rằng  $C, B, D$  thẳng hàng.

### Lời giải

a) Ta có  $OA - O'A < OA + O'A$

$$(4 - 3 < 5 < 4 + 3)$$

Chứng tỏ  $(O)$  và  $(O')$  cắt nhau tại hai điểm phân biệt  $A$  và  $B$ .

b) Xét tam giác  $AOO'$  có

$$AO = 4\text{cm}; AO' = 3\text{cm} \text{ và } OO' = 5\text{cm}.$$

$$\text{Ta có: } 5^2 = 4^2 + 3^2 \text{ hay } OO'^2 = AO^2 + AO'^2$$

Theo định lý Pythagore đảo, ta có tam giác

$AOO'$  vuông tại  $A$ .

Ta có:  $OA = OB = 4\text{cm}$ ;  $O'A = O'B = 3\text{cm}$  nên  $OO'$  là đường trung trực của đoạn  $AB$   
 $\Rightarrow OO' \perp AB$ .

Gọi  $I$  là giao điểm của  $OO'$  và  $AB$ , ta có  $AI$  là đường cao của tam giác vuông  $AOO'$ .

Gọi  $S_{AOO'}$  là diện tích của tam giác vuông  $AOO'$

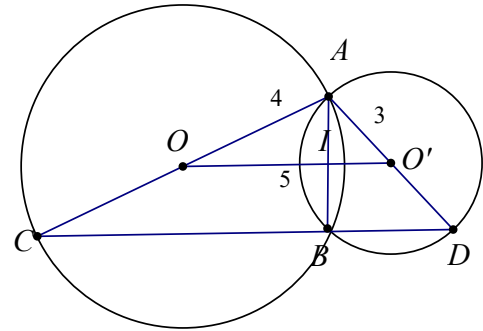
$$\text{Ta có } S_{AOO'} = \frac{1}{2} AI \cdot OO' = AO \cdot AO' \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow AI = \frac{OA \cdot O'A}{OO'} = \frac{4 \cdot 3}{5} = 2,4(\text{cm}) \Rightarrow AB = 4,8(\text{cm})$$

nên tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$  hay  $BC \perp AB$ .

Chứng minh tương tự ta có  $BD \perp AB$ .

Do đó ba điểm  $C, B, D$  thẳng hàng.



**Bài toán 19.** Cho hai đường tròn  $(O; 10\text{cm})$  và  $(O'; 17\text{cm})$  cắt nhau tại hai điểm  $A$  và  $B$ , biết  $AB = 16\text{cm}$ . Tính độ dài đoạn  $OO'$ .

**Lời giải**

Trường hợp 1: (Xem hình vẽ).

$O$  và  $O'$  nằm về hai phía đối với  $AB$ .

Ta có:  $OA = OB = 10\text{cm}$

$O'A = O'B = 17\text{cm}$

Nên  $OO'$  là đường trung trực của đoạn  $AB$  nên

$OO' \perp AB$  tại  $H$  và

$$HA = HB = \frac{AB}{2} = \frac{16}{2} = 8(\text{cm})$$

Xét tam giác  $AHO$  vuông tại  $H$ .

Theo định lý Pythagore, ta có:

$$OA^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow OH^2 = OA^2 - AH^2 = 10^2 - 8^2$$

$$\Rightarrow OH = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6(\text{cm})$$

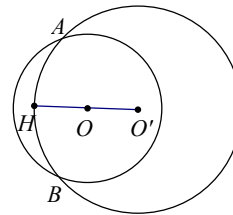
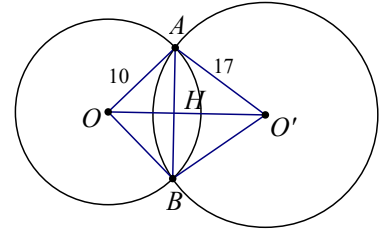
Tương tự với tam giác vuông  $AHO'$ , ta có  $HO' = 15(\text{cm})$ .

$$OO' = OH + HO' = 6 + 15 = 21(\text{cm})$$

Trường hợp 2:

$OO'$  nằm về cùng một phía đối với  $AB$

Ta có  $OO' = O'H - OH = 15 - 6 = 9(\text{cm})$ .



**Bài toán 20.** Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  cắt nhau tại hai điểm  $A$  và  $B$  (xem hình vẽ). Vẽ hình bình hành  $OBO'C$ . Chứng minh rằng  $AC \parallel OO'$ .

**Lời giải**

Gọi  $H$  là giao điểm của  $AB$  và  $OO'$  ta có

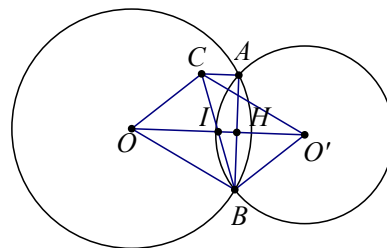
$H$  là trung điểm của  $AB$ .

Gọi  $I$  là giao điểm của  $BC$  và  $OO'$

Vì  $OCO'B$  là hình bình hành nên  $I$  là trung điểm của  $BC$ .

Do đó  $IH$  là đường trung bình của  $\triangle ABC$

$$\Rightarrow IH \parallel AC \text{ hay } OO' \parallel AC.$$



## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

**Bài toán 1.** Cho đường tròn  $(O)$  đường kính  $BC$  và điểm  $A$  (khác  $B$  và  $C$ ).

- Chứng minh rằng nếu  $A$  nằm trên  $(O)$  thì  $ABC$  là một tam giác vuông; ngược lại, nếu  $ABC$  là một tam giác vuông tại  $A$  thì  $A$  nằm trên  $(O)$ .
- Giả sử  $A$  là một trong hai giao điểm của đường tròn  $(B; BO)$  với đường tròn  $(O)$ . Tính các góc của tam giác  $ABC$ .
- Với cùng giả thiết câu b, tính độ dài cung  $AC$  và diện tích hình quạt nằm trong  $(O)$  giới hạn bởi các bán kính  $OA$  và  $OC$ , biết rằng  $BC = 6\text{ cm}$ .

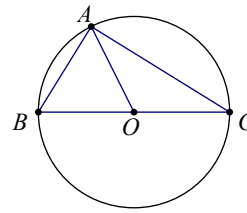
### Lời giải

a)  $A$  nằm trên  $(O) \Rightarrow OA = OB = OC$ .

Tam giác  $ABC$  có  $O$  là trung điểm đoạn

$BC$  nên  $AO$  là trung tuyến mà  $AO = \frac{1}{2}BC$ .

Do đó  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ .



Ngược lại tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AO$  là đường trung tuyến

$$\Rightarrow OA = OB = OC$$

Chứng tỏ  $A$  thuộc đường tròn  $(O)$ .

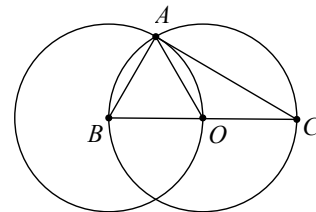
b) Khi  $A$  là giao điểm của đường tròn  $(B; BO)$  với đường tròn  $(O)$

Ta có  $OA = OB = AB$  nên tam giác  $ABC$  đều

$$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{AOB} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AOC} = 180^\circ - \widehat{AOB} \text{ (hai góc kề bù)}$$

$$= 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$



Xét tam giác  $AOC$  cân tại  $O$  có:

$$\widehat{AOC} = 120^\circ (cmt) \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{OAC} = 30^\circ$$

Xét tam giác  $ABC$  có  $\widehat{BAC} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ$

Các góc của tam giác  $ABC$  là  $\widehat{BAC} = 90^\circ, \widehat{B} = 60^\circ, \widehat{C} = 30^\circ$ .

c) Khi  $BC = 6\text{ cm}$  ta có bán kính đường tròn  $(O)$  là  $3\text{ cm}$ .

Gọi  $l_{AC}$  là độ dài cung  $AC$  có  $l_{AC} = \frac{120}{180} \cdot \pi \cdot 3 \approx 6,3(\text{cm})$

Gọi  $S$  là diện tích hình quạt nằm trong  $(O)$  giới hạn bởi các bán kính  $OA$  và  $OC$ , ta có:

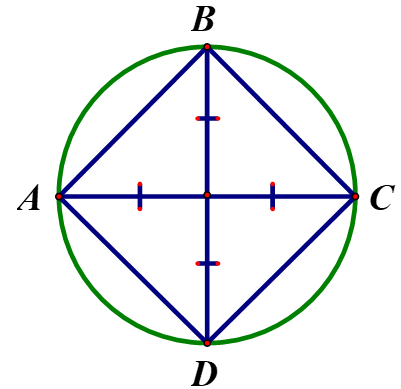
$$S = \frac{120}{360} \cdot \pi \cdot 3^2 \approx 9,4(\text{cm}^2)$$

**Bài toán 2.** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$ .

a) Chứng minh bốn điểm  $A, B, C, D$  cùng nằm trên một đường tròn.

b) So sánh độ dài của  $AC$  và  $BD$ .

**Lời giải**

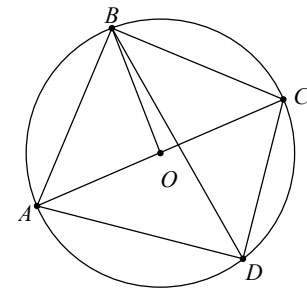


a) Nối  $A$  với  $C$ . Gọi  $O$  là trung điểm đoạn  $AC$ .

Xét tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$  (gt) có  $OB$  là đường trung tuyến

$$\Rightarrow OB = \frac{1}{2} AC \text{ hay } OA = OB = OC$$

Do đó ba điểm  $A, B, C$  nằm trên đường tròn  $\left(O; \frac{AC}{2}\right)$



Chứng minh tương tự  $D$  nằm trên đường tròn  $\left(O; \frac{AC}{2}\right)$ .

b)  $AC > BD$  ( $AC$  là đường kính).

**Bài toán 3.** Cho  $AB$  là dây bất kì (không phải là đường kính) của đường tròn  $(O; 4 \text{ cm})$ . Gọi  $C$  và  $D$  lần lượt là các điểm đối xứng với  $A$  và  $B$  qua tâm  $O$ .

a) Hai điểm  $C$  và  $D$  có nằm trên đường tròn  $(O)$  không? Vì sao?

b) Biết rằng  $ABCD$  là một hình vuông. Tính độ dài cung lớn  $AB$  và diện tích hình quạt tròn tạo bởi hai bán kính  $OA$  và  $OB$ .

**Lời giải**

a) Vì  $C$  đối xứng  $A$  qua tâm  $O \Rightarrow OC = OA$ .

Chứng minh tương tự  $OD = OB$

Mà  $OA = OB = 4 \text{ cm}$

$\Rightarrow OA = OB = OC = OD = 4 \text{ cm}$  hay hai điểm  $C$  và  $D$  nằm trên đường tròn  $(O)$ .

b)  $ABCD$  là hình vuông  $AC \perp BD$  tại  $O$  hay số đo cung nhỏ  $AB$  bằng  $90^\circ$ .

$\Rightarrow$  số đo cung lớn  $AB$  bằng  $360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$ .

Ta có độ dài cung lớn  $AB$  là:  $l = \frac{90}{180} \cdot \pi \cdot 4 = 6,28 \text{ (cm)}$

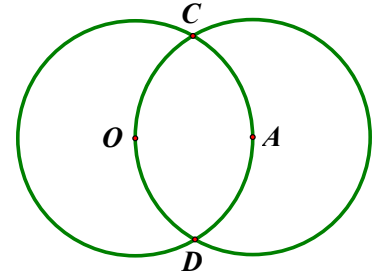
Gọi  $S$  là diện tích hình quạt tròn tạo bởi hai bán kính  $OA$  và  $OB$

Ta có  $S = \frac{90}{360} \cdot \pi \cdot 4^2 = 12,56 \text{ (cm}^2\text{)}$ .

**Bài toán 4.** Cho hai đường tròn  $(O; 2 \text{ cm})$  và  $(A; 2 \text{ cm})$  cắt nhau tại  $C, D$ , điểm  $A$  nằm trên đường tròn tâm  $O$  (hình vẽ).

a) Vẽ đường tròn  $(C; 2 \text{ cm})$

b) Đường tròn  $(C; 2 \text{ cm})$  có đi qua hai điểm  $O$  và  $A$  không?  
Vì sao?



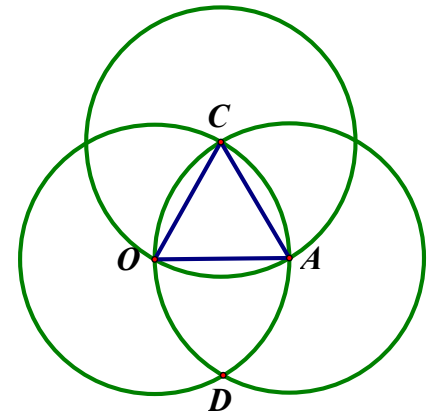
**Lời giải**

a) Xem hình vẽ.

b) Vì  $C \in (O; 2 \text{ cm}) \Rightarrow CO = 2 \text{ cm}$ .

Tương tự  $C \in (A; 2 \text{ cm}) \Rightarrow CA = 2 \text{ cm}$ .

Ta có  $CO = CA = 2 \text{ cm}$  nên  $(C; 2 \text{ cm})$  đi qua hai điểm  $O$  và  $A$ .



**Bài toán 5.** Cho tam giác vuông  $ABC$  ( $\hat{A}$  vuông). Vẽ hai đường tròn  $(B; BA)$  và  $(C; CA)$  cắt nhau tại  $A$  và  $A'$ . Chứng minh rằng:

a)  $BA$  và  $BA'$  là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn  $(C; CA)$ .

b)  $CA$  và  $CA'$  là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn  $(B; BA)$ .

**Lời giải**

a) Xét  $\triangle BA'C$  và  $\triangle BAC$  có:

$BC$  (cạnh chung),

$BA = BA'$ ,

$CA = CA'$ .

Do đó  $\triangle BA'C = \triangle BAC$  (c.c.c)

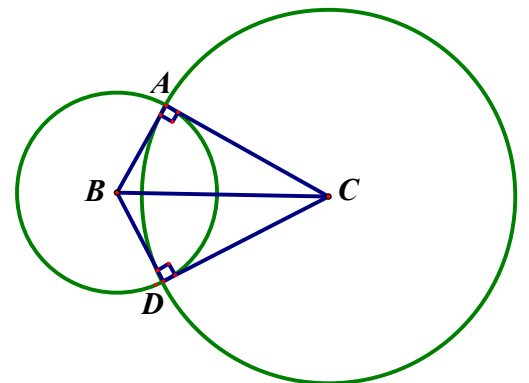
$\Rightarrow \widehat{BA'C} = \widehat{BAC} = 90^\circ$  (góc tương ứng) hay  $BA' \perp CA'$

Chứng tỏ  $BA'$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(C; CA)$

Lại có  $BA \perp CA$  (gt) nên  $BA$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(C; CA)$

Do đó  $BA$  và  $BA'$  là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn  $(C; CA)$

b) Chứng minh tương tự  $CA$  và  $CA'$  là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn  $(B; BA)$ .



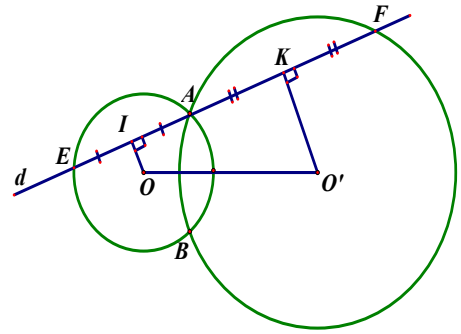
**Bài toán 6.** Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  cắt nhau tại  $A$  và  $B$ . Một đường thẳng  $d$  đi qua  $A$  cắt  $(O)$  tại  $E$  và cắt  $(O')$  tại  $F$  ( $E$  và  $F$  khác  $A$ ).

Biết điểm  $A$  nằm trong đoạn  $EF$ . Gọi  $I$  và  $K$  lần lượt là trung điểm của  $AE$  và  $AF$  (hình vẽ)

a) Chứng minh rằng tứ giác  $OO'KI$  là một hình thang vuông.

b) Chứng minh rằng  $IK = \frac{1}{2}EF$

c) Khi  $d$  ở vị trí nào ( $d$  vẫn qua  $A$ ) thì  $OO'KI$  là một hình chữ nhật?



### Lời giải

a) Ta có:  $OE = OA$  nên tam giác  $AOE$  cân tại  $O$  có  $I$  là trung điểm của  $AE$  (gt) nên  $OI$  là đường trung tuyến mà  $\triangle AOE$  cân tại  $O$  (cmt)

$\Rightarrow OI$  đồng thời là đường cao hay  $OI \perp AE$

Chứng minh tương tự, ta có  $O'K \perp AF$  mà  $E, A, F \in d$  nên  $OI, O'K$  cùng vuông góc với  $d$   
 $\Rightarrow OI \parallel O'K$

Do đó tứ giác  $OO'KI$  là hình thang vuông.

b) Ta có:  $IK = IA + AK$  mà  $IA = \frac{1}{2}EA$ ;  $AK = \frac{1}{2}AF$

$$\Rightarrow IK = \frac{1}{2}(EA + AF) = \frac{1}{2}EF$$

c)  $d$  đi qua  $A$  và  $d \parallel OO'$  thì  $OO'KI$  là hình chữ nhật.

**Bài toán 7.** Cho điểm  $B$  nằm giữa hai điểm  $A$  và  $C$ , sao cho  $AB = 2 \text{ cm}$  và  $BC = 1 \text{ cm}$ . Vẽ các đường tròn  $(A; 1,5 \text{ cm})$ ,  $(B; 3 \text{ cm})$ ,  $(C; 2 \text{ cm})$ . Hãy xác định các cặp đường tròn:

a) Cắt nhau; b) Không giao nhau;

c) Tiếp xúc nhau.

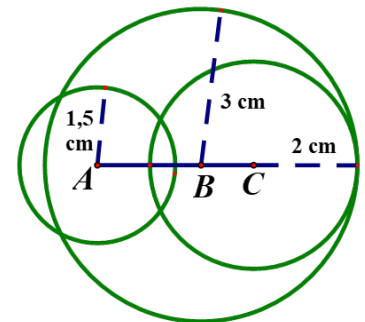
### Lời giải

a) \* Đường tròn  $(A; 1,5 \text{ cm})$  và đường tròn  $(B; 3 \text{ cm})$  cắt nhau.

\* Đường tròn  $(A; 1,5 \text{ cm})$  và đường tròn  $(C; 2 \text{ cm})$  cắt nhau.

b) Không có.

c) Đường tròn  $(B; 3 \text{ cm})$  và đường tròn  $(C; 2 \text{ cm})$  tiếp xúc trong.



**Bài toán 8.** Trong hình vẽ, độ dài cạnh của các hình vuông lớn là  $10\text{ cm}$ . Tính diện tích và chu vi của phần được tô màu.

**Lời giải**

Diện tích của phần được tô màu trên hình vẽ là diện tích của 8 hình viên phân tạo bởi cung  $AB$  và dây  $AB$  (xem hình vẽ).

Gọi  $S$  là diện tích hình viên phân, ta có:  $S = S_q - S_{AIB}$

( $S_q$ : diện tích hình quạt chắn cung  $AB$ ,  $S_{AIB}$  là diện tích hình tam giác vuông cân cạnh  $5\text{ cm}$ ).

$$\text{Ta có: } S_q = \frac{90}{360} \cdot \pi \cdot 5^2 = \frac{25}{4} \pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$S_{AOI} = \frac{1}{2} \cdot AI \cdot BI = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = \frac{25}{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

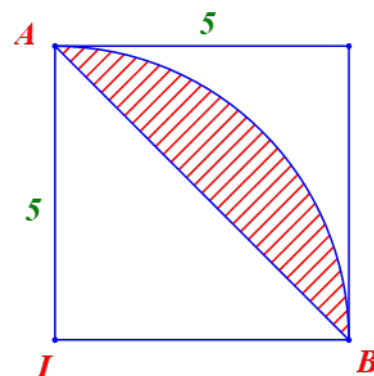
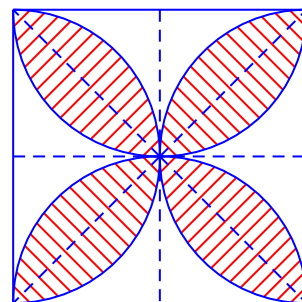
Do đó diện tích 1 hình viên phân là:

$$S_{AIO} = \frac{25}{4} \pi - \frac{25}{2} \approx 7,13 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vậy diện tích phần được tô màu là:  $8 \cdot 7,13 \approx 57 \text{ (cm}^2\text{)}$

Chu vi phần được tô màu là 8 cung  $AB$ .

$$\text{Gọi } l \text{ là độ dài cung } AB, \text{ ta có: } l = \frac{90}{180} \cdot \pi \cdot 5 = \frac{5}{2} \cdot \pi$$



♣ HẾT ♣