

Chương IV. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Bài 11. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Cho góc nhọn α . Xét tam giác ABC vuông tại A , có góc nhọn bằng α (hình vẽ bên). Ta có:

I. Định nghĩa

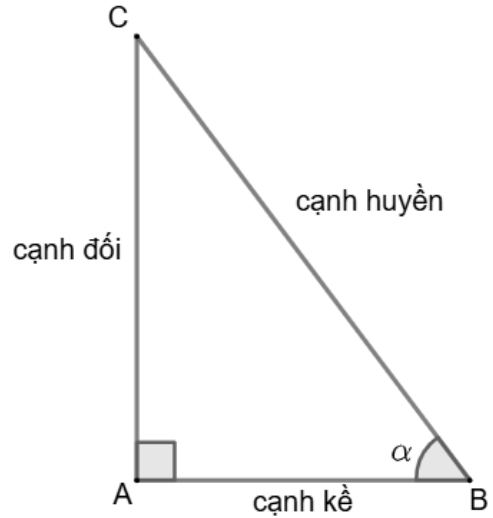
$\sin \alpha = \frac{AC}{BC}$ (tỉ số giữa cạnh đối và cạnh huyền).

$\cos \alpha = \frac{AB}{BC}$ (tỉ số giữa cạnh kề và cạnh huyền)

$\tan \alpha = \frac{AC}{AB}$ (tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề)

$\cot \alpha = \frac{AB}{AC}$ (tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối)

Chú ý: $0 < \sin \alpha < 1; 0 < \cos \alpha < 1$.



II. Tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha \quad \cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$$

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Tính tỉ số lượng giác của một góc nhọn

Bài toán 1. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = 6\text{ cm}$, $AC = 8\text{ cm}$. Hãy tính các tỉ số lượng giác $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ với $\alpha = \widehat{B}$.

Lời giải

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có $\widehat{B} = \alpha(gt)$

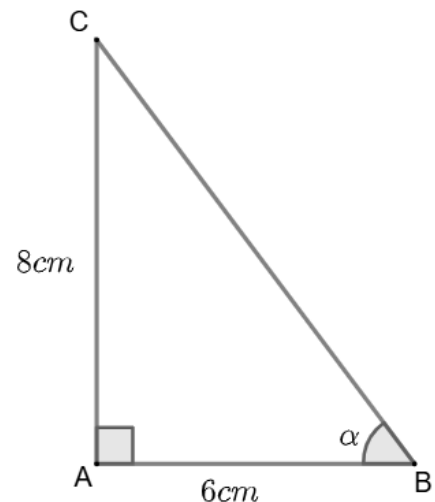
Theo định lí Pythagore, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow BC = 10(\text{cm})$$

Theo định nghĩa của tỉ số lượng giác $\sin, \cos, \tan, \cot$, ta có:

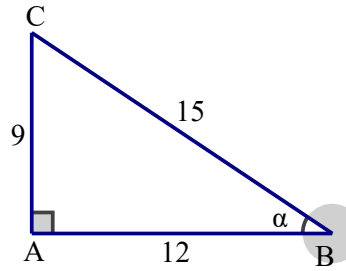
$$\sin \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}; \quad \cos \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5};$$

$$\tan \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}; \quad \cot \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$



Bài toán 2. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = 12$, $AC = 9$, $BC = 15$. Tính các tỉ số lượng giác $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ với $\alpha = \widehat{B}$.

Lời giải



Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có $\alpha = \widehat{B}$ (GT)

Ta có: $\sin \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$;

$\cos \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$;

$\tan \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$;

$\cot \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$.

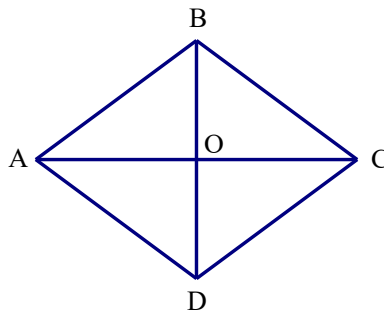
Bài toán 3. Cho hình thoi $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại điểm O (hình vẽ bên).

a) Tỉ số $\frac{OB}{AB}$ là sin của góc nhọn nào?

Tỉ số $\frac{OB}{BC}$ là cos của góc nhọn nào?

b) Viết tỉ số lượng giác của mỗi góc nhọn sau: $\tan \widehat{OCD}$, $\cot \widehat{OAD}$.

Lời giải



Ta có $ABCD$ là hình thoi (GT) nên hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại O .

a) Xét $\triangle OAB$ vuông tại O nên tỉ số $\frac{OB}{AB} = \sin \widehat{BAO}$.

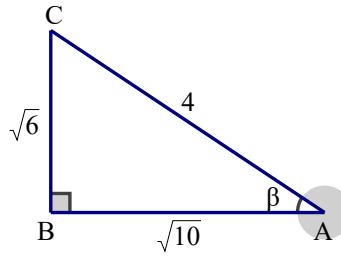
Tương tự $\triangle OCB$ vuông tại O nên tỉ số $\frac{OB}{BC} = \cos \widehat{CBO}$.

b) Xét $\triangle OCD$ vuông tại O nên tỉ số $\tan \widehat{OCD} = \frac{OD}{OC}$.

Tương tự $\triangle OAD$ vuông tại O nên tỉ số $\cot \widehat{OAD} = \frac{OA}{OD}$.

Bài toán 4. Cho tam giác ABC vuông tại B , có $AB = \sqrt{10}$, $BC = \sqrt{6}$ và góc nhọn $\widehat{A} = \beta$. Tính các tỉ số lượng giác của góc nhọn β .

Lời giải



Xét $\triangle ABC$ vuông tại B có $\alpha = \widehat{B}$ (GT).

Theo định lí Pythagore, ta có:

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 = (\sqrt{6})^2 + (\sqrt{10})^2 = 16$$

$$\Rightarrow AC = 4$$

Theo định lí của tỉ số lượng giác sin, cos, tan, cot.

$$\text{Ta có: } \sin \beta = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{6}}{4}; \quad \cos \beta = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{10}}{4};$$

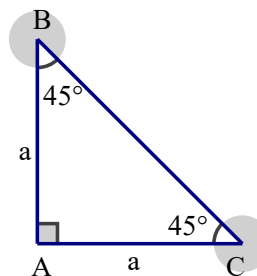
$$\tan \beta = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}; \quad \cot \beta = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{6}}.$$

Bài toán 5. Cho tam giác ABC vuông cân tại A , có cạnh góc vuông bằng a . Tính độ dài cạnh huyền BC theo a rồi tính:

* Các tỉ số $\frac{AB}{BC}$, $\frac{AC}{BC}$. Từ đó suy ra $\sin 45^\circ$, $\cos 45^\circ$.

* Các tỉ số $\frac{AB}{AC}$, $\frac{AC}{AB}$. Từ đó suy ra $\tan 45^\circ$, $\cot 45^\circ$.

Lời giải



Xét $\triangle ABC$ vuông cân tại A (GT)

Theo định lí Pythagore, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{2}.$$

$$\text{* Tỉ số } \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ hay } \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Tương tự tỉ số } \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos C$$

$$\text{Vậy } \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

* Tỉ số $\frac{AB}{AC} = \frac{a}{a} = 1$ hay $\tan C = 1$.

Tương tự tỉ số $\frac{AC}{AB} = 1$ hay $\cot C = 1$.

Vậy $\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1$.

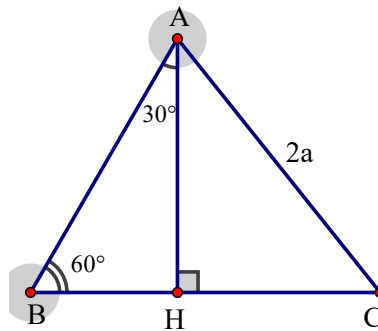
Bài toán 6. Cho tam giác đều ABC , có cạnh bằng $2a$ (xem hình vẽ).

a) Tính đường cao AH của tam giác ABC .

b) Tính $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$, $\sin 60^\circ$ và $\cos 60^\circ$.

c) Tính $\tan 30^\circ$, $\cot 30^\circ$, $\tan 60^\circ$ và $\cot 60^\circ$.

Lời giải



a) $\triangle ABC$ đều nên đường cao AH đồng thời cũng là đường phân giác của góc BAC .

Xét tam giác AHB vuông tại H có $\widehat{BAH} = 30^\circ$

$$BH = \frac{AB}{2} = \frac{2a}{2} = a.$$

Theo định lí Pythagore, ta có: $AB^2 = AH^2 + BH^2$

$$\Rightarrow AH^2 = AB^2 - BH^2 = (2a)^2 - a^2 = 3a^2$$

$$\Rightarrow AH = a\sqrt{3}.$$

b) Ta có: $\sin 30^\circ = \sin BAH = \frac{BH}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$

$$\cos 30^\circ = \cos BAH = \frac{AH}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\tan 30^\circ = \tan BAH = \frac{BH}{AH} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\cot 30^\circ = \cot BAH = \frac{AH}{BH} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}.$$

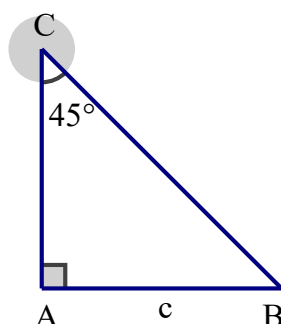
Từ bài toán 5 và 6 ở trên, ta có bảng sau:

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Bài toán 7. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $\widehat{C} = 45^\circ$ và $AB = c$. Tính BC và AC theo c .

Lời giải



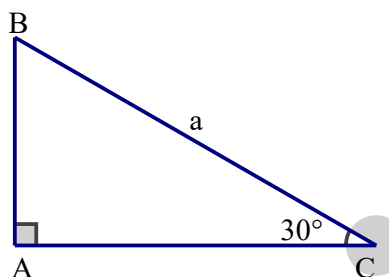
$$\text{Ta có } \sin C = \frac{AB}{BC} \Rightarrow BC = \frac{AB}{\sin C}$$

$$\text{Theo bảng trên } \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ nên } BC = \frac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = c\sqrt{2}$$

$$\text{Tương tự } \cot C = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC = AB \cdot \cot C = c \cdot \cot C = c \cdot 1 = c$$

Bài toán 8. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $\widehat{C} = 30^\circ$ và $BC = a$. Tính các cạnh AB và AC theo a .

Lời giải



$$\text{Ta có } \sin C = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = BC \cdot \sin C = a \cdot \sin 30^\circ$$

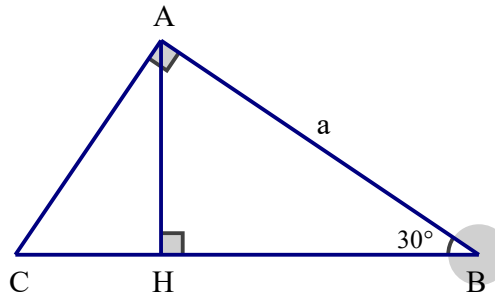
$$\text{Theo bảng trên } \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \text{ nên } AB = a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{2}$$

$$\text{Tương tự } \cos C = \frac{AC}{BC}$$

$$\Rightarrow AC = BC \cdot \cos C = a \cdot \cos C = a \cdot \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Bài toán 9. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $\widehat{B} = 30^\circ$, đường cao AH . Tính tỉ số $\frac{AH}{BH}$ và $\frac{AH}{CH}$, từ đó tìm $\frac{BH}{CH}$.

Lời giải



Ta có $AH \perp BC$.

Xét $\triangle AHB$ vuông tại H , có $\widehat{B} = 30^\circ$ (GT)

$$\frac{AH}{BH} = \tan B = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

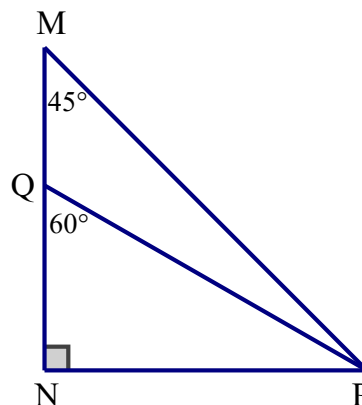
$\triangle ABC$ vuông tại A có $\widehat{B} = 30^\circ$ (GT) $\Rightarrow \widehat{C} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

Xét $\triangle AHC$ vuông tại H , có $\widehat{C} = 60^\circ$ nên $\frac{AH}{CH} = \tan C = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$.

$$\text{Do đó } \frac{BH}{CH} = \frac{AH}{CH} \cdot \frac{BH}{AH} = \sqrt{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} = 3.$$

Bài toán 10. Trong hình vẽ bên, hãy tính tỉ số $\frac{PN}{PQ}$ và $\frac{PN}{PM}$, từ đó tìm $\frac{PQ}{PM}$.

Lời giải



Xét $\triangle QNP$ vuông tại N , có $\widehat{Q} = 60^\circ$ (GT)

$$\text{Ta có } \frac{NP}{PQ} = \sin Q = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

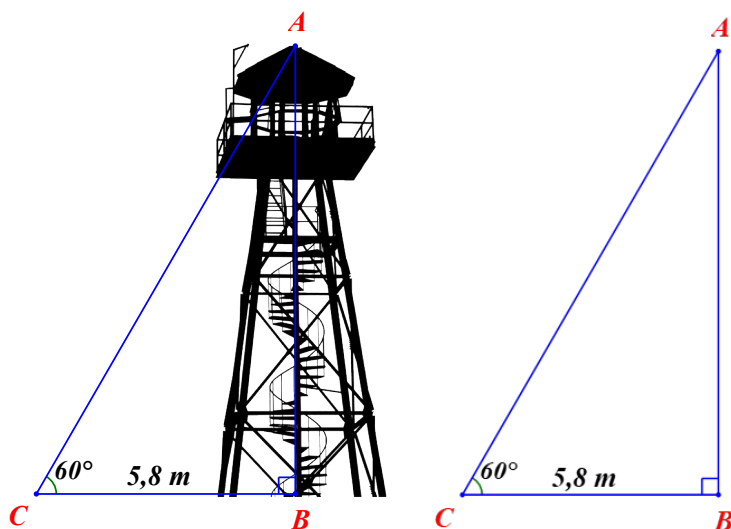
Xét $\triangle MNP$ vuông tại N , có $\widehat{M} = 45^\circ$

$$\text{nên } \frac{PN}{PM} = \sin M = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } \frac{PQ}{PM} = \frac{PQ}{PN} \cdot \frac{PN}{PM} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Bài toán 11. Tìm chiều cao của tháp canh trong hình vẽ bên (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải



$$\text{Ta có } \tan C = \frac{AB}{BC}$$

$$\text{mà } \widehat{C} = 60^\circ, BC = 5,8 \text{ (GT)}$$

$$\text{hay } \tan 60^\circ = \frac{AB}{5,8}$$

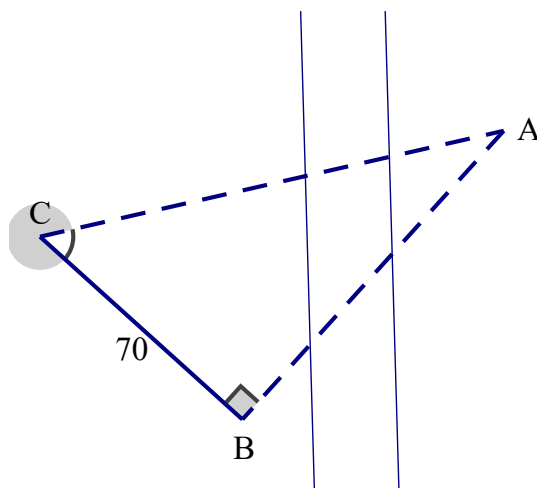
$$\Rightarrow AB = 5,8 \cdot \tan 60^\circ$$

$$AB = 5,8 \cdot \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AB \approx 10,05 \text{ (m)}$$

Bài toán 12. Để tính khoảng cách giữa hai địa điểm A, B mà không đo trực tiếp được. Chẳng hạn A và B là hai địa điểm ở hai bên sông, người ta lấy điểm C về phía bờ sông có chứa B sao cho $\triangle ABC$ vuông tại B . Ở bên bờ sông chứa B người ta đo được $\widehat{ACB} = 55^\circ$ và $BC = 70 \text{ m}$, với các dữ liệu đó khoảng cách AB có tính được không và nếu được bạn hãy tính AB .

Lời giải



Ta có $\triangle ABC$ vuông tại B , có $\widehat{ACB} = 55^\circ$

và $BC = 70 \text{ m}$ (GT)

$$\begin{aligned} \text{nên } \frac{AB}{BC} &= \tan C \Rightarrow AB = BC \cdot \tan C \\ &= 70 \cdot \tan 55^\circ \approx 99,97(m) \end{aligned}$$

Trả lời: Khoảng cách AB tính được $AB \approx 99,97(m)$

Bài toán 13. Hãy viết các tỉ số lượng giác sau thành tỉ số lượng giác của góc nhỏ hơn 45° .
 $\sin 65^\circ$, $\cos 75^\circ$, $\tan 85^\circ$, $\cot 71^\circ$.

Lời giải

Ta có: $\sin 65^\circ = \cos(90^\circ - 65^\circ) = \cos 25^\circ$.

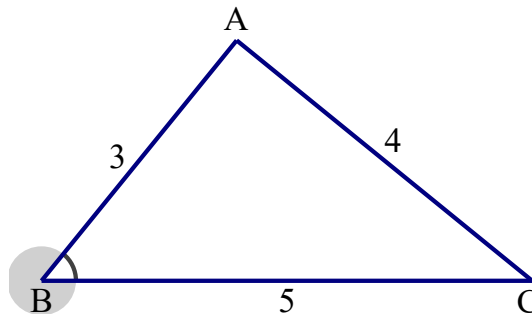
$\cos 75^\circ = \sin(90^\circ - 75^\circ) = \sin 15^\circ$.

$\tan 85^\circ = \cot(90^\circ - 85^\circ) = \cot 5^\circ$.

$\cot 71^\circ = \tan(90^\circ - 71^\circ) = \tan 19^\circ$.

Bài toán 14. Cho tam giác ABC vuông tại A , biết $AB = 3\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$. Tính các tỉ số lượng giác của hai góc B và C

Lời giải



Áp dụng định lý Pythagore ta có $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 5^2 - 3^2 = 16$
 $\Rightarrow AC = 4\text{cm}$

$\sin B = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos C = \frac{4}{5}$ (Vì $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ là hai góc phụ nhau)

$\cos B = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin C = \frac{3}{5}$

$\tan B = \frac{4}{3} \Rightarrow \cot C = \frac{4}{3}$

$\cot B = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan C = \frac{3}{4}$.

Bài toán 15. Cho tam giác ABC vuông tại B , trong đó $AB = 0,9\text{cm}$, $BC = 1,2\text{cm}$. Tính các tỉ số lượng giác của góc A đó suy ra tỉ số lượng giác của góc C .

Lời giải

Ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (định lý Pythagore)

$$AC^2 = 0,9^2 + 1,2^2 = 2,25$$

$$\Rightarrow AC = 1,5cm$$

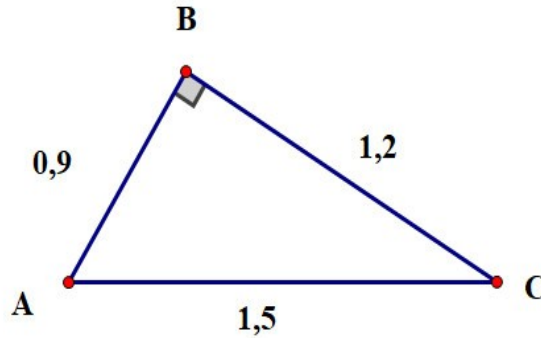
$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{1,2}{1,5} = \frac{4}{5};$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{0,9}{1,5} = \frac{3}{5}$$

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{1,2}{0,9} = \frac{4}{3}$$

$$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{4}$$

Vì $\hat{A}$ và $\hat{C}$ là hai góc phụ nhau, ta có



$$\sin C = \frac{3}{5}$$

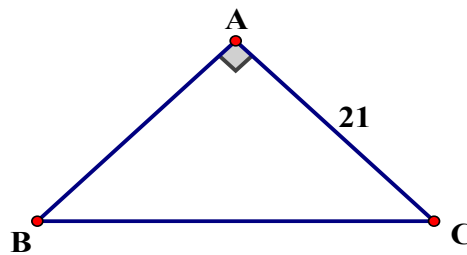
$$\cos C = \frac{4}{5};$$

$$\tan C = \frac{3}{4}$$

$$\cot C = \frac{4}{3}$$

Bài toán 16. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC = 12cm, \cos C = \frac{3}{5}$. Tính $\tan B, \cot B$.

Lời giải



Ta có $\frac{AC}{BC} = \cos C = \frac{3}{5}$ hay $\frac{21}{BC} = \frac{3}{5} \Rightarrow BC = \frac{21 \cdot 5}{3} = 35(cm)$

Áp dụng định lý Pythagore :

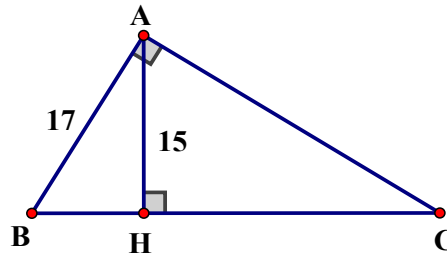
$$\begin{aligned} AB^2 &= BC^2 - AC^2 \\ &= 35^2 - 21^2 = 784 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow AB = 28(cm)$$

Vậy $\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$ và $\cot B = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{3}$.

Bài toán 17. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Biết $AB = 17, BH = 8$. Tìm $\sin B, \sin C$. (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải



Xét tam giác AHB vuông tại H

Theo định lý Pythagore, ta có :

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 17^2 - 8^2 = 225$$

$$\Rightarrow AH = 15$$

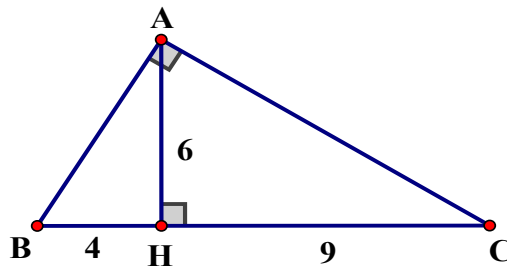
$$\text{Vậy } \sin B = \frac{AH}{AB} = \frac{15}{17} \approx 0,88$$

$$\text{Ta có } AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BC = \frac{AB^2}{BH} = \frac{17^2}{8} = 36,125.$$

$$\text{Vậy } \sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{17}{36,125} \approx 0,47.$$

Bài toán 18. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Biết $HB = 4, HC = 9$. Tính $\sin B, \sin C$.
(Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải



Ta có $\triangle ABC$ vuông tại A có đường cao AH

Áp dụng hệ thức $h^2 = b' \cdot c'$, ta có :

$$AH^2 = HB \cdot HC = 4 \cdot 9 = 36 \Rightarrow AH = 6$$

Theo định lý Pythagore:

$$\begin{aligned} AB^2 &= AH^2 + HB^2 \\ &= 6^2 + 4^2 = 52 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow AB \approx 7,21$$

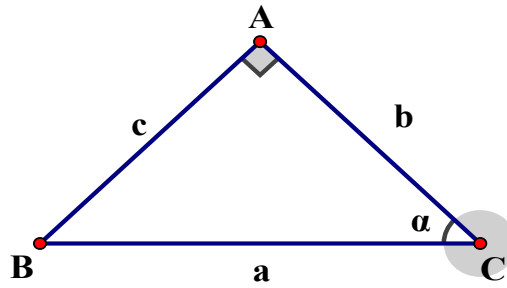
$$\text{Do đó } \sin B = \frac{AH}{AB} \approx \frac{6}{7,21} \approx 0,83. \text{ Lại có } BC = BH + HC = 4 + 9 = 13$$

$$\text{Ta có } AC^2 = BC^2 - AB^2 = 13^2 - 52 = 117 \Rightarrow AC \approx 10,82$$

$$\text{Vậy } \sin C = \frac{AH}{AC} \approx \frac{6}{10,82} \approx 0,55.$$

Bài toán 19. Cho tam giác ABC vuông tại A , $\widehat{C} = \alpha$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. Hãy tính $\sin \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$.

Lời giải



$$\cos \alpha = \frac{4}{5} = \frac{b}{a} \Rightarrow b = \frac{4}{5}a.$$

Theo định lý Pythagore, ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = a^2 - \left(\frac{4}{5}a\right)^2$$

$$= a^2 - \frac{16}{25}a^2 = \frac{9}{25}a^2 \Rightarrow c = \frac{3}{5}a.$$

$$\text{Vậy } \sin \alpha = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}a : a = \frac{3}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{c}{b} = \frac{3}{5}a : \frac{4}{5}a = \frac{3}{4} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{4}{3}.$$

Bài toán 20. Cho hình vẽ như bài 10, cho $\tan \alpha = \frac{1}{3}$. Tính $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

(Xem hình bài 19).

$$\text{Ta có } \tan \alpha = \frac{c}{b} = \frac{1}{3} \Rightarrow b = 3c$$

Theo định lý Pythagore, ta có:

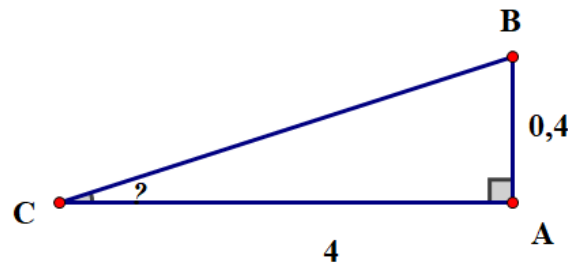
$$a^2 = b^2 + c^2 = (3c)^2 + c^2 = 10c^2 \Rightarrow a = c\sqrt{10}$$

$$\text{Do đó } \sin \alpha = \frac{c}{a} = \frac{c}{c\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0,32$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{a} = \frac{3c}{c\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \approx 0,95$$

Bài toán 21. Trong các tòa nhà trung cư, người ta thường thiết kế đoạn dốc cho người đi xe lăn với góc dốc bé hơn 6° . Hãy tính góc dốc, biết rằng đoạn dốc vào sảnh nhà dài $4m$, độ cao của đỉnh dốc bằng $0,4m$

Lời giải



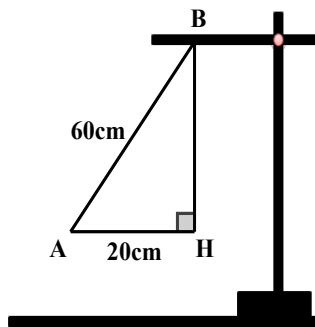
$\triangle ABC$ vuông tại A có $AC = 4m, AB = 0,4m$

$$\text{Ta có } \tan C = \frac{AB}{AC} = \frac{0,4}{4} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \hat{C} \approx 5^{\circ}42'.$$

Bài toán 22. Treo quả cầu kim loại vào giá thí nghiệm bằng sợi dây mảnh nhẹ không dẫn. Khi quả cầu đứng yên tại vị trí cân bằng, dây treo có phương thẳng đứng. Kéo quả cầu khỏi vị trí cân bằng một đoạn nhỏ rồi buông ra thì quả cầu sẽ chuyển động qua lại quanh vị trí cân bằng. Khi kéo quả cầu khỏi vị trí cân bằng, giả sử tâm A của quả cầu cách B một khoảng $AB = 60cm$ và cách vị trí cân bằng một khoảng $AH = 20cm$ (hình vẽ). Tính số đo góc α tạo bởi dây và vị trí cân bằng (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ).

Lời giải



Xét tam giác AHB vuông tại H có $AH = 20cm, AB = 60cm$.

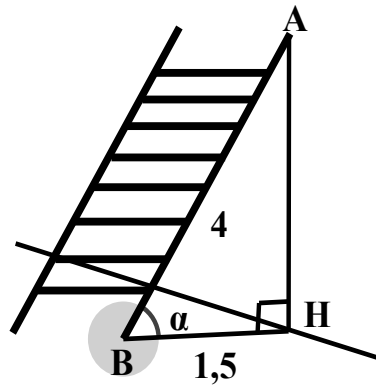
Gọi α là góc tạo bởi dây AB và vị trí cân bằng (Xem hình vẽ $\widehat{ABH}$ là α)

$$\text{Ta có } \sin \alpha = \frac{AH}{AB} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha \approx 19^{\circ}$$

Vậy $\alpha \approx 19^{\circ}$.

Bài toán 23. Hình vẽ bên mô tả một chiếc thang có chiều dài $AB = 4m$ được đặt dựa vào tường, khoảng cách từ chân thang đến chân tường là $BH = 1,5m$. Tính góc tạo bởi cạnh AB và phương nằm ngang trên mặt đất (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ).

Lời giải



Gọi α là góc tạo bởi cạnh AB và phương nằm ngang trên mặt đất (góc $\widehat{ABH}$).

Xét tam giác AHB vuông tại H có $BH = 1,5m$, $AB = 4m$.

Ta có : $\cos \alpha = \frac{BH}{AB} = \frac{1,5}{4} = 0,375$.

Do đó $\alpha \approx 68^\circ$

Vậy góc tạo bởi cạnh AB và phương nằm ngang trên mặt đất khoảng 68°

II. Chứng minh các hệ thức lượng giác

Bài toán 24. Hãy sử dụng định nghĩa các tỷ số lượng giác của một góc nhọn để chứng minh : Với góc nhọn α tùy ý , ta có

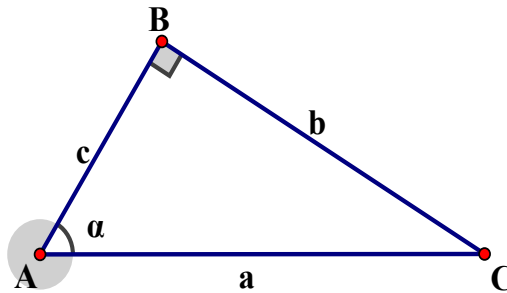
a) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

b) $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

c) $\tan \alpha . \cot \alpha = 1$

d) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Lời giải



a) Theo định nghĩa tỷ số lượng giác ta có : $\sin \alpha = \frac{b}{a}$; $\cos \alpha = \frac{c}{a}$

Biến đổi vế phải : $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a} : \frac{c}{a} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = \frac{b}{c} = \tan \alpha$ (đpcm)

b) Chứng minh tương tự câu a.

c) Ta có $\tan \alpha = \frac{b}{c}$; $\cot \alpha = \frac{c}{b}$

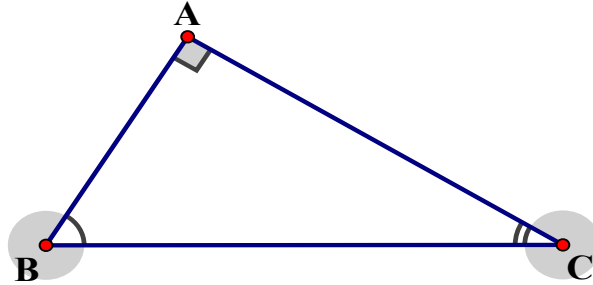
Khi đó ta có vế trái : $\tan \alpha . \cot \alpha = \frac{b}{c} . \frac{c}{b} = 1$ (đpcm)

d) Ta có $\sin \alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{b^2}{a^2}$, tương tự $\cos^2 \alpha = \frac{c^2}{a^2}$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1 \quad (\text{đpcm})$$

Bài toán 25. Cho tam giác ABC vuông tại A . Chứng minh rằng $\frac{AC}{AB} = \frac{\sin B}{\sin C}$.

Lời giải



Ta có $\sin B = \frac{AC}{BC}$; $\sin C = \frac{AB}{BC}$

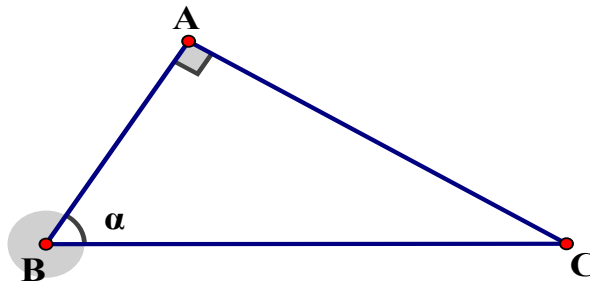
Vế phải : $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{AC}{BC} : \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{AB} \quad (\text{đpcm})$

Bài toán 26. Cho tam giác ABC vuông tại A , và $\widehat{B} = \alpha$. chứng minh rằng:

a) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

b) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

Lời giải



a) Theo định nghĩa tỷ số lượng giác ta có

$$\tan \alpha = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{AC^2}{AB^2}$$

Vế trái $1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{AB^2}$

$$\frac{BC^2}{AB^2} = \frac{1}{\left(\frac{AB}{BC}\right)^2} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\text{đpcm})$$

b) Chứng minh tương tự, ta có $\cot \alpha = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \cot^2 \alpha = \frac{AB^2}{AC^2}$

Vế trái $1 + \cot^2 \alpha = 1 + \frac{AB^2}{AC^2}$

Bài toán 27. Cho góc nhọn α . Hãy rút gọn các biểu thức sau:

$$a) A = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)^2$$

$$b) B = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$

Hướng dẫn: Sử dụng hằng đẳng thức $(A \pm B)^2$ để khai triển rồi áp dụng hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
(Chứng minh ở bài 32)

Lời giải

$$\begin{aligned} a) A &= (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)^2 \\ &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 2 \sin \alpha \cos \alpha + (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) B &= \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \\ &= (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3 + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \\ &= (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3 + 3 \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos^4 \alpha \\ &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 = 1^3 = 1. \end{aligned}$$

Bài toán 28. Cho góc nhọn α . Chứng tỏ rằng giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào góc nhọn α

$$M = (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - (\cot \alpha - \tan \alpha)^2.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} M &= (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - (\cot \alpha - \tan \alpha)^2 \\ &= (\tan \alpha + \cot \alpha + \cot \alpha - \tan \alpha) [(\tan \alpha + \cot \alpha) - (\cot \alpha - \tan \alpha)] \\ &= 2 \cot \alpha [\tan \alpha + \cot \alpha - \cot \alpha + \tan \alpha] \\ &= 2 \cot \alpha \cdot 2 \tan \alpha = 4 \cot \alpha \cdot \tan \alpha = 4 \end{aligned}$$

Bài toán 29. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào góc α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$).

$$\frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)^2 - (\cos \alpha + \sin \alpha)^2}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha}$$

Lời giải

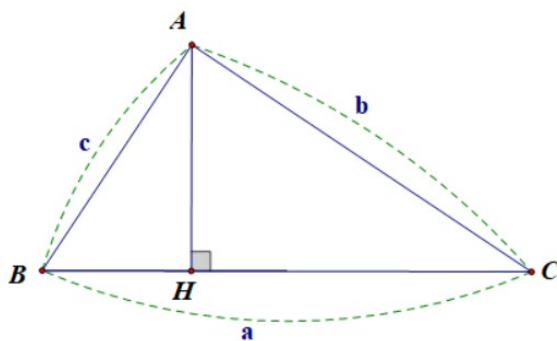
$$\begin{aligned} \text{Ta có } & \frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)^2 - (\cos \alpha + \sin \alpha)^2}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha} \\ &= \frac{\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha - (\cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha)}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha} \\ &= \frac{1 - 2 \cos \alpha \sin \alpha - 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} \\ &= \frac{-4 \cos \alpha \sin \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} = -4 \end{aligned}$$

Chúng tỏ biểu thức không phụ thuộc vào góc α

Bài toán 30. Cho tam giác nhọn ABC có $BC = a; CA = b; AB = c$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Lời giải



Kẻ đường cao AH ta có : $\sin B = \frac{AH}{AB}$; $\sin C = \frac{AH}{AC}$

$$\Rightarrow \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{AH}{AB} : \frac{AH}{AC} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$$

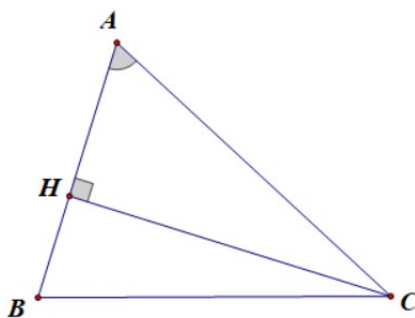
$$\Rightarrow \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Tương tự : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

Do đó : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ (đpcm).

Bài toán 31. Cho tam giác nhọn ABC . Chứng minh rằng : $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$

Lời giải



Vẽ $CH \perp AB$ ($H \in AB$)

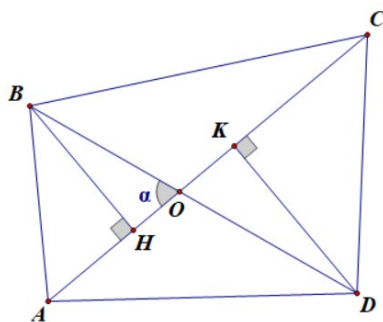
Ta có : $CH = AC \cdot \sin A$

Do đó : $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$.

Bài toán 32. Cho α là góc nhọn tạo bởi hai đường chéo AC và BD của tứ giác $ABCD$.

Chứng minh rằng : $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \alpha$.

Lời giải



Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD .

Kẻ $BH \perp AC, DK \perp AC$.

Các tam giác vuông BHO và DKO có : $BH = OB \cdot \sin \alpha$ và $DK = OD \cdot \sin \alpha$ (1)

Ta có : $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} AC \cdot BH + \frac{1}{2} AC \cdot DK \\ &= \frac{1}{2} AC(BH + DK) \quad (2) \end{aligned}$$

Thay (1) và (2), ta có : $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot (OB \cdot \sin \alpha + OD \cdot \sin \alpha)$

$$= \frac{1}{2} AC(OB + OD) \sin \alpha$$

$$= \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$$

Áp dụng : Cho tứ giác $ABCD$, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O , biết $\widehat{AOB} = 60^\circ$; $AC = 4,2 \text{ cm}$; $BD = 6,5 \text{ cm}$. Tính diện tích tứ giác $ABCD$.

Hướng dẫn : Sử dụng ngay kết quả của bài toán trên ta có :

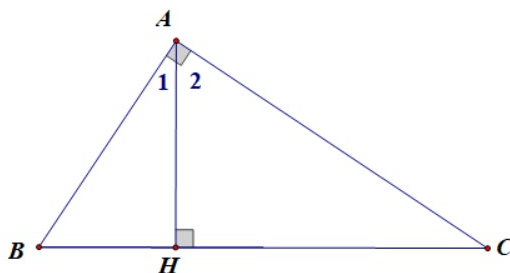
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4,2 \cdot 6,5 \cdot \sin 60^\circ \approx 11,824 \text{ cm}^2$$

Bài toán 33. Cho tam giác ABC vuông tại A . đường cao AH .

a) Chứng minh rằng : $\sin^2 B = \frac{HC}{BC}$.

b) Chứng minh rằng : $\sin 2C = 2 \sin C \cdot \cos C$

Lời giải



a) Xét tam giác vuông AHB

Theo định nghĩa tỷ số lượng giác, ta có : $\sin B = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \sin^2 B = \frac{AH^2}{AB^2}$ (1)

Xét $\triangle AHB$ và $\triangle AHC$ vuông tại H

Có : $\hat{\mathbf{A}}_1 = \hat{\mathbf{C}}$ (cùng phụ với $\hat{B}$)

Tương tự có : $\hat{A}_2 = \hat{B}$ (cùng phụ với $\hat{C}$)

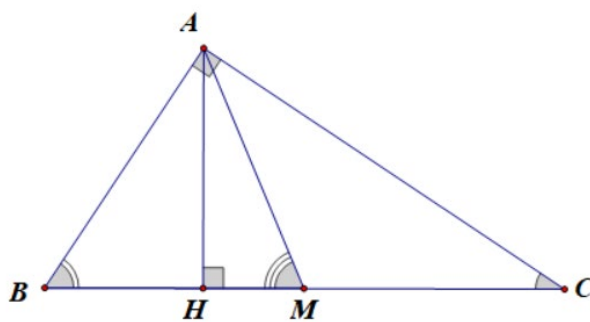
$$\text{Do đó : } \Delta AHB \sim \Delta CHA(g-g) \Rightarrow \frac{AH}{HC} = \frac{HB}{AH} \Rightarrow AH^2 = HB \cdot HC \quad (*)$$

Chúng minh tương tự, ta có : $\Delta ABC \simeq \Delta HBA(g \cdot g)$

$$\Rightarrow \frac{AB}{HB} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow AB^2 = HB \cdot BC \quad (**)$$

Thay (*) (**) vào (1), ta có : $\sin^2 B = \frac{AH^2}{AB^2} = \frac{HB \cdot HC}{HB \cdot BC} = \frac{HC}{BC}$.

b)



Kẻ trung tuyến AM ta có: $MA = MC = MB = \frac{BC}{2}$

hay $\triangle AMC$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{C} \Rightarrow \widehat{AMH} = 2.\widehat{C}$ (góc ngoài của $\triangle AMC$)

Xét tam giác vuông AHM ta có : $\sin \widehat{AMH} = \frac{AH}{AM}$ hay $\sin 2C = \frac{AH}{AM} = \frac{AH}{\frac{BC}{2}} = \frac{2AH}{BC}$ (1)

$$\text{Mà } AC^2 = BC \cdot CH \Rightarrow \sin C \cdot \cos C = \frac{AH \cdot CH}{BC \cdot CH} = \frac{AH}{BC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có $\sin 2C = 2 \sin C \cdot \cos C$.

Bài toán 34. Cho tam giác ABC cân tại A có $AB = AC = 1\text{cm}$ và $\widehat{A} = 2\alpha$ ($0^\circ < \alpha < 45^\circ$) các đường cao

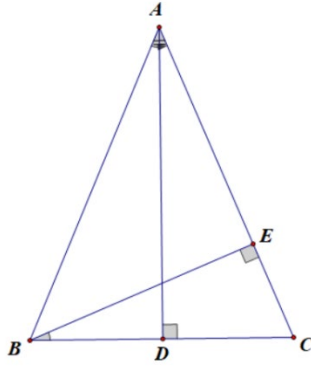
$$AD \text{ và } BE. \left(-\frac{1}{2}\right)x \cdot y^2 \cdot 2x^3.$$

a) Chứng minh rằng : $\Delta ADC \sim \Delta BEC$.

b) Chứng minh : $\sin A = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$

Hướng dẫn: Với câu b) để chứng minh đẳng thức , ta đưa hai biểu thức về cùng một biểu thức thứ ba . Dựa vào các hệ thức lượng giác trong các tam giác vuông .

Lời giải



a) Dễ thấy : $\triangle ADC \sim \triangle BEC$ (g.g)

b) $\triangle ABC$ cân tại A nên đường cao AD đồng thời là đường phân giác

$$\widehat{BAD} = \widehat{CAD} = \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$$

Xét tam giác vuông ABD có : $BD = AB \sin \widehat{BAD} = 1 \sin \alpha$

$\triangle ABC$ cân tại A nên đường cao AD đồng thời là đường trung tuyến nên

$$BC = 2BD = 2 \sin \alpha$$

Xét tam giác vuông CEB có : $\widehat{CBE} = \widehat{CAD} = \alpha$ (cùng phụ với $\widehat{C}$)

$$\text{Ta có : } BE = BC \cdot \cos \widehat{CBE} = BC \cos \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (1)$$

$$\text{Xét tam giác vuông } AEB \text{ có : } \sin A = \frac{BE}{AB} = \frac{BE}{1} = BE \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có : $\sin A = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ (đpcm)

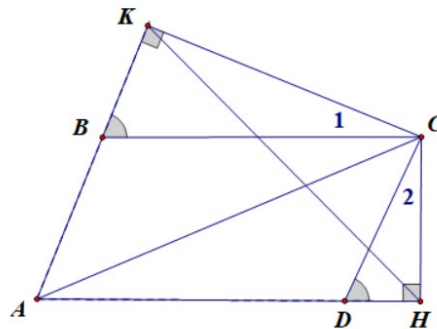
Bài toán 35. Cho hình bình hành $ABCD$ có AC là đường chéo lớn . Kẻ CH vuông góc với AD ($H \in AD$)

và CK vuông góc với AB ($K \in AB$)

a) Chứng minh : $\triangle CKH \sim \triangle ABC$.

b) Chứng minh : $HK = AC \sin \widehat{BAD}$.

Lời giải



a) Ta có: $AB \parallel CD$ (gt) $\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CDH}$ (đồng vị)

Tương tự : $AD \parallel BC \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{KBC}$.

Nên $\widehat{KBC} = \widehat{CDH}$

$$\text{Do đó : } \triangle CKB \sim \triangle CHD \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{CK}{CH} = \frac{CB}{CD} \text{ mà } CD = AB \Rightarrow \frac{CK}{CH} = \frac{CB}{AB} \quad (1)$$

Lại có : $AB \parallel CD$ mà $AK \perp CK \Rightarrow CD \perp CK$ hay $\widehat{KCD} = \widehat{BKC} = 90^\circ$

Mặt khác $\widehat{ABC}$ là góc ngoài của $\triangle BKC$ nên

$$\widehat{ABC} = \widehat{BKC} + \widehat{C}_1 = 90^\circ + \widehat{C}_1$$

Lại có : $\widehat{KCH} = \widehat{KCD} + \widehat{C}_2 = 90^\circ + \widehat{C}_2$ mà $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ (cmt)

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{KCH} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có : $\triangle CKH \sim \triangle BCA$ (c.g.c)

Ta có : $\triangle CKH \sim \triangle BCA$ (cmt)

$$\Rightarrow \frac{HK}{CA} = \frac{CK}{CB} = \sin \widehat{KBC} \Rightarrow HK = CA \cdot \sin \widehat{KBC} \text{ mà } \widehat{BAD} = \widehat{KBC} \text{ (cmt)}$$

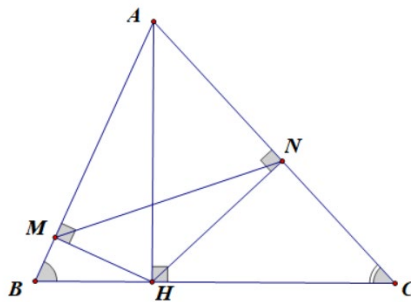
Do đó : $HK = AC \sin \widehat{BAD}$ (đpcm)

Bài toán 36. Cho $\triangle ABC$ nhọn, đường cao AH . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC .

a) Chứng minh : $AM \cdot AB = AN \cdot AC$.

b) Chứng minh : $\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \sin^2 B \cdot \sin^2 C$.

Lời giải



a) Xét tam giác vuông AHB vuông tại H có đường cao HM (gt)

Theo hệ thức $b^2 = a \cdot b'$, ta có : $AH^2 = AM \cdot AB$ (1)

Tương tự với AHC , ta có : $AH^2 = AN \cdot AC$ (2)

Từ (1) và (2) có : $AM \cdot AB = AN \cdot AC$.

b) Dễ thấy : $\triangle AMN \sim \triangle ACB$ (c.g.c)

$$\text{Nên : Vế trái : } \frac{S_{AMN}}{S_{ACB}} = \left(\frac{AM}{AC} \right)^2 = \frac{AM^2}{AC^2}$$

$$\text{Lại có : } \left. \begin{array}{l} \sin B = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \sin^2 B = \frac{AH^2}{AB^2} \\ \sin C = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \sin^2 C = \frac{AH^2}{AC^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \sin^2 B \sin^2 C = \frac{AH^4}{AB^2 \cdot AC^2} \quad (3)$$

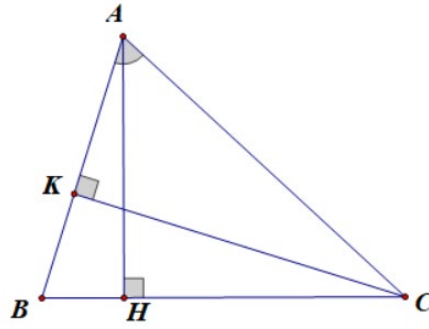
Thay $AH^4 = (AB \cdot AM)^2 = AB^2 \cdot AM^2$ vào (3), ta có :

$$\sin^2 B \sin^2 C = \frac{AB^2 \cdot AM^2}{AC^2 \cdot AB^2} = \frac{AM^2}{AC^2} \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \sin^2 B \sin^2 C.$$

Bài toán 37. Cho $\triangle ABC$ nhọn, đường cao AH . Chứng minh rằng :

$$\text{a) } \sin A + \cos A > 1. \quad \text{b) } AH = \frac{BC}{\cotg B + \cotg C}.$$

Lời giải



a) Kẻ $CK \perp AB$. Xét $\triangle AKC$ ta có : $\sin A = \frac{CK}{AC}$; $\cos A = \frac{AK}{AC}$

$\Rightarrow \sin A + \cos A = \frac{CK + AK}{AC} > 1$ (Vì theo bất đẳng thức tam giác $CK + AK > AC$)

b) Ta có :

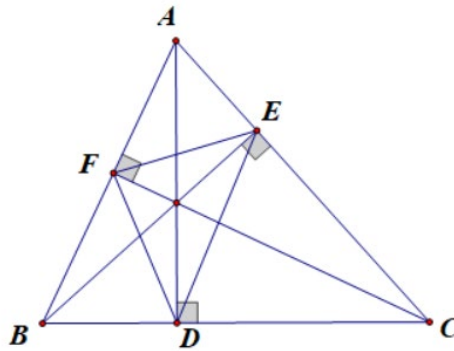
$$BC = BH + HC = AH \cot B + AH \cot C \\ = AH(\cot B + \cot C)$$

$$\Rightarrow AH = \frac{BC}{\cot B + \cot C}$$

Bài toán 8. Cho $\triangle ABC$ nhọn , các đường cao AD, BE, CF .

Chứng minh rằng : $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C$

Lời giải



Dễ thấy $\triangle AEB \sim \triangle AFC (g.g) \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ABC (c.g.c)$

Do đó $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AE}{AB} \right)^2 = \cos^2 A$.

Chứng minh tương tự có :

$$\frac{S_{BDP}}{S_{MC}} = \left(\frac{BD}{AB} \right)^2 = \cos^2 B$$

$$\frac{S_{CDE}}{S_{CAB}} = \left(\frac{CD}{AC} \right)^2 = \cos^2 C$$

mà $S_{DEP} = S_{ABC} - S_{AEP} - S_{BDF} - S_{CDE}$

$$\Rightarrow \frac{S_{DFE}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} - \frac{S_{AEP}}{S_{ABC}} - \frac{S_{ADF}}{S_{ABC}} - \frac{S_{CDE}}{S_{ABC}} = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B = \cos^2 C \text{ (đpcm)}$$

III. So sánh các tỉ số lượng giác

(Không dùng bảng số và máy tính)

Bài toán 39. Hãy sắp xếp các tỉ số lượng giác sau đây theo thứ tự tăng dần (có giải thích , không dùng bảng số và máy tính)

a) $\sin 40^\circ; \cos 28^\circ; \sin 68^\circ; \cos 88^\circ;$ b) $\tan 65^\circ; \cot 42^\circ; \tan 76^\circ; \cot 27^\circ$

Hướng dẫn : Dùng tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau để đưa về cùng một loại (nếu cần)

Thường thì đưa về $\sin \alpha$ và $\tan \alpha$ vì :

Khi góc nhọn α tăng từ 0° đến 90° thì :

+) $\sin \alpha$ và $\tan \alpha$ tăng

+) $\cos \alpha$ và $\cot \alpha$ giảm

Lời giải

a) $\cos 28^\circ = \sin(90^\circ - 28^\circ) = \sin 62^\circ; \cos 88^\circ = \sin(90^\circ - 88^\circ) = \sin 2^\circ$

mà $\sin 2^\circ < \sin 40^\circ < \sin 62^\circ < \sin 68^\circ$

$\Rightarrow \cos 88^\circ < \sin 40^\circ < \cos 28^\circ < \sin 68^\circ$

b) $\cot 42^\circ = \tan(90^\circ - 42^\circ) = \tan 48^\circ; \cot 27^\circ = \tan(90^\circ - 27^\circ) = \tan 63^\circ$

Mà $\tan 48^\circ < \tan 63^\circ < \tan 65^\circ < \tan 76^\circ$

$\Rightarrow \cot 42^\circ < \cot 27^\circ < \tan 65^\circ < \tan 76^\circ$.

Bài toán 40. So sánh:

a) $\sin 72^\circ$ và $\cos 18^\circ;$

b) $\cos 72^\circ$ và $\sin 18^\circ;$

c) $\tan 72^\circ$ và $\cot 18^\circ;$

d) $\cot 72^\circ$ và $\tan 18^\circ;$

Lời giải

a) Ta có: $\sin 72^\circ = \cos(90^\circ - 72^\circ) = \cos 18^\circ$.

b) Ta có: $\cos 72^\circ = \sin(90^\circ - 72^\circ) = \sin 18^\circ$.

c) Ta có: $\tan 72^\circ = \cot(90^\circ - 72^\circ) = \cot 18^\circ$.

d) Ta có: $\cot 72^\circ = \tan(90^\circ - 72^\circ) = \tan 18^\circ$.

Bài toán 41. Hãy sắp xếp các tỉ số lượng giác sau đây theo thứ tự giảm dần (có giải thích, không dùng bảng số và máy tính).

a) $\sin 25^\circ; \cos 15^\circ; \sin 50^\circ; \cos 67^\circ 30'.$

b) $\cot 35^\circ; \tan 48^\circ; \cot 44^\circ; \tan 53^\circ; \cot 39^\circ.$

Hướng dẫn: Như bài 33 ở trên.

Lời giải

a) $\cos 15^\circ = \sin(90^\circ - 15^\circ) = \sin 75^\circ$

$\cos 67^\circ 30' = \sin(90^\circ - 67^\circ 30') = \sin 22^\circ 30'$

$$\text{mà } \sin 75^0 > \sin 50^0 > \sin 25^0 > \sin 22^0 30'$$

$$\Rightarrow \cos 15^0 > \sin 50^0 > \sin 25^0 > \cos 67^0 30'$$

$$\text{b) } \cot 35^0 = \tan(90^0 - 35^0) = \tan 55^0$$

$$\cot 44^0 = \tan(90^0 - 44^0) = \tan 46^0$$

$$\cot 39^0 \tan(90^0 - 39^0) = \tan 51^0$$

$$\text{mà } \tan 55^0 > \tan 53^0 > \tan 51^0 > \tan 48^0 > \tan 46^0$$

$$\Rightarrow \cot 35^0 > \tan 53^0 > \cot 39^0 > \tan 48^0 > \cot 44^0.$$

Bài toán 42. Không dùng bảng số và máy tính hãy so sánh:

a) $\sin \alpha$ và $\tan \alpha$

b) $\cos \alpha$ và $\cot \alpha$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } \tan \alpha > \sin \alpha \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} > \sin \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha > \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$(\text{vì } 0^0 < \alpha < 90^0) \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} \Leftrightarrow 1 > \cos \alpha (*)$$

$$(\text{vì } 0^0 < \alpha < 90^0 \Rightarrow \sin \alpha > 0)$$

Điều cuối cùng (*) luôn đúng với $0^0 < \alpha < 90^0$

$$\text{b) Tương tự câu a ta có: } \cos \alpha > \cot \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha < \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \Leftrightarrow \sin \alpha \cdot \cos \alpha < \cos \alpha$$

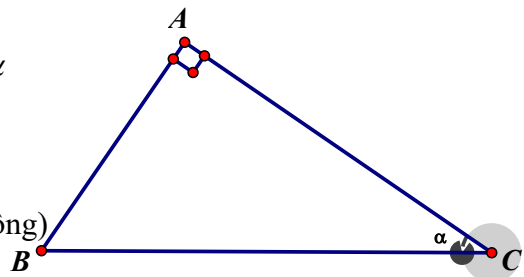
$$\Leftrightarrow \sin \alpha < 1 (\text{luôn đúng với } 0^0 < \alpha < 90^0)$$

Cách khác: a) dựng $\triangle ABC$ vuông tại A có $\widehat{C} = \alpha$

$$\text{Ta có } \sin \alpha = \frac{AB}{BC}; \tan \alpha = \frac{AB}{AC}$$

Mà $BC > AC$ (cạnh huyền lớn hơn cạnh góc vuông)

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} < \frac{AB}{AC} \text{ hay } \sin \alpha < \tan \alpha.$$



Bài toán 43: Không dùng bảng số và máy tính hãy so sánh:

a) $\sin 32^0$ và $\tan 32^0$

b) $\cos 35^0$ và $\cot 35^0$

c) $\sin 25^0$ và $\cot 65^0$

d) $\cos 54^0$ và $\tan 42^0$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \tan 32^0 > \sin 32^0 \Leftrightarrow \frac{\sin 32^0}{\cos 32^0} > \sin 32^0 \Leftrightarrow \sin 32^0 > \sin 32^0 \cdot \cos 32^0$$

$$(\text{vì } \cos \alpha > 0) \Leftrightarrow 1 > \cos 32^0 (\text{luôn đúng})$$

$$\text{b) Theo câu b bài 49 ta có: } \cos 35^0 < \cot 35^0.$$

$$\text{c) } \cot 65^0 = \tan(90^0 - 65^0) = \tan 25^0$$

theo câu a bài 49 ta có $\sin 25^0 < \tan 25^0$ Do đó $\sin 25^0 < \cot 65^0$

$$d) \cos 54^\circ = \sin(90^\circ - 54^\circ) = \sin 36^\circ < \tan 36^\circ < \tan 42^\circ$$

$$\text{Vậy } \cos 54^\circ < \tan 42^\circ.$$

Bài toán 44. Hãy sắp xếp các tỉ số lượng giác sau đây theo thứ tự tăng dần (có giải thích, không dùng bảng số và máy tính): $\cot 36^\circ$; $\tan 72^\circ$; $\cot 21^\circ$; $\sin 54^\circ$.

Lời giải

$$\cot 36^\circ = \tan 54^\circ; \cot 21^\circ = \tan 69^\circ \text{ và } \sin 54^\circ < \tan 54^\circ$$

$$\text{Ta có: } \sin 54^\circ < \tan 54^\circ < \tan 69^\circ < \tan 72^\circ$$

$$\Rightarrow \sin 54^\circ < \cot 36^\circ < \cot 21^\circ < \tan 72^\circ.$$

IV. This giá trị của các biểu thức lượng giác

Bài toán 45. Không dùng bảng số và máy tính hãy tính:

a) $\sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \dots + \sin^2 70^\circ + \sin^2 80^\circ$

b) $\cos^2 12^\circ + \cos^2 78^\circ + \cos^2 1^\circ + \cos^2 89^\circ$.

Hướng dẫn: – Dùng tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau.

- Sử dụng các hệ thức lượng giác đã được chứng minh ở bài toán 30; 31; 32; ...

Lời giải

a) $\sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \dots + \sin^2 70^\circ + \sin^2 80^\circ$

$$= (\sin^2 10^\circ + \sin^2 80^\circ) + (\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ) + (\sin^2 30^\circ + \sin^2 60^\circ) + (\sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ)$$

$$= (\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ) + (\sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ) + (\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ) + (\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ)$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$$

$$\cos^2 12^\circ + \cos^2 78^\circ + \cos^2 1^\circ + \cos^2 89^\circ$$

$$= (\cos^2 12^\circ + \sin^2 12^\circ) + (\cos^2 1^\circ + \sin^2 1^\circ)$$

$$= 1 + 1$$

$$= 2.$$

Bài toán 46: Không dùng bảng số và máy tính, hãy tính:

$$A = \sin^2 14^\circ + \sin^2 76^\circ + \tan 1^\circ \cdot \tan 89^\circ - \frac{2 \sin 55^\circ}{\cos 35^\circ}$$

$$B = \tan 67^\circ + \cos^2 16^\circ - \cot 23^\circ + \cos^2 74^\circ - \frac{\cot 37^\circ}{\tan 53^\circ}.$$

Lời giải

$$A = \sin^2 14^\circ + \sin^2 76^\circ + \tan 1^\circ \cdot \tan 89^\circ - \frac{2 \sin 55^\circ}{\cos 35^\circ}$$

$$= \sin^2 14^\circ + \cos^2 14^\circ + \tan 1^\circ \cdot \cot 1^\circ - \frac{2 \sin 55^\circ}{\sin 55^\circ}$$

$$= 1 + 1 - 2$$

$$= 0$$

$$\begin{aligned} B &= \tan 67^\circ + \cos^2 16^\circ - \cot 23^\circ + \cos^2 74^\circ - \frac{\cot 37^\circ}{\tan 53^\circ} \\ &= (\tan 67^\circ - \cot 23^\circ) + (\cos^2 16^\circ + \cos^2 74^\circ) - \frac{\cot 37^\circ}{\cot 37^\circ} \\ &= (\cot 23^\circ - \cot 23^\circ) + (\cos^2 16^\circ + \sin^2 16^\circ) - 1 \\ &= 0 + 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Bài toán 47. Cho $\tan \alpha = 3$. Tính $\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$

Hướng dẫn: Vì $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow \cos \alpha > 0$ chia cả tử và mẫu cho $\cos \alpha$ để đưa về $\tan \alpha$.

Lời giải

$$\text{Chia cả tử và mẫu cho } \cos \alpha \text{ ta có: } \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \frac{1 + 3}{1 - 3} = -2$$

Bài toán 48. Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x}$. Cho $\tan x = \sqrt{3}$.

Hướng dẫn: Đưa về $\tan x$ ta chia cả tử và mẫu cho $\cos^2 x$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } B = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x}} = \frac{\tan^2 x - 1}{\tan x} = \frac{(\sqrt{3})^2 - 1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Bài toán 49. Cho $\tan \alpha = 3$. Tính $A = \frac{\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha}{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \tan \alpha = 3 \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 3 \Rightarrow \sin \alpha = 3 \cos \alpha \Rightarrow \sin^3 \alpha = (3 \cos \alpha)^3$$

$$A = \frac{(3 \cos \alpha)^3 - \cos^3 \alpha}{(3 \cos \alpha)^3 + \cos^3 \alpha} = \frac{27 \cos^3 \alpha - \cos^3 \alpha}{27 \cos^3 \alpha + \cos^3 \alpha} = \frac{26 \cos^3 \alpha}{28 \cos^3 \alpha} = \frac{13}{14}$$

$$\text{Cách khác: } A = \frac{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} - \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x}}{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} + \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x}} = \frac{\tan^3 x - 1}{\tan^3 x + 1} = \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} = \frac{26}{28} = \frac{13}{14}.$$

Bài toán 50. Cho $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0,48$. Tính $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2,0,48$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{12}{25} = \frac{49}{25}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5}$$

$$\text{Ta lại có: } (\sin \alpha + \cos \alpha)^3 = \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha + 3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)$$

$$\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^3 - 3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)$$

$$= \left(\frac{7}{5}\right)^3 - 3 \cdot \frac{12}{25} \cdot \frac{7}{5} = \frac{343}{125} - \frac{252}{125} = \frac{91}{125} = 0,725$$

Bài toán 51. Tính số đo góc nhọn α biết: Cách khác: $\cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha = \frac{1}{4}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 - \sin^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1 - 3 \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} \Leftrightarrow -3 \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} - 1 = \frac{-3}{4}$$

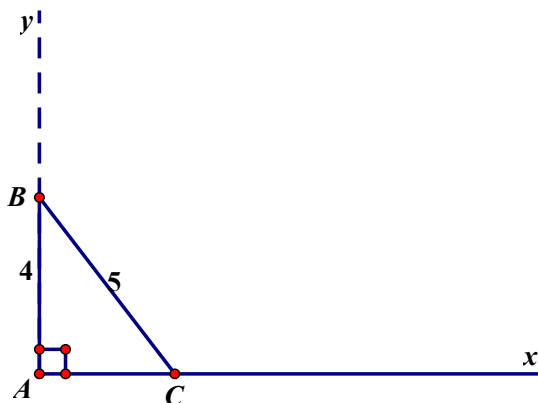
$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ (\sin \alpha > 0)$$

Vậy $\alpha = 30^\circ$

IV. Dựng góc α khi biết một tỉ số lượng giác.

Bài toán 52. Dựng góc nhọn α biết $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

Hướng dẫn: Ta biết rằng $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$ là tỉ số giữa một cạnh góc vuông và cạnh huyền. Vì vậy để dựng được góc α ta đưa về dựng một tam giác vuông biết một cạnh góc vuông và cạnh huyền. Sau đó sử dụng định nghĩa để nhận ra góc α .



Lời giải

+ Dựng góc $\widehat{xAy} = 90^\circ$. Lấy một đoạn thẳng làm đơn vị.

+ Trên tia Ay đặt $AB = 4$.

+ Dựng đường tròn tâm B bán kính bằng 5.

+ lấy C là giao điểm của (B;5) và tia Ax .

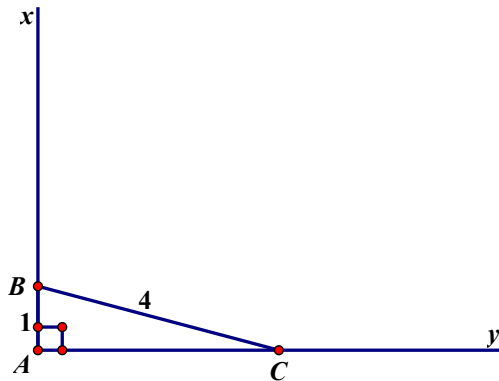
+ Nối B và C ta được $\widehat{ACB}$ chính là góc α cần dựng.

Thật vậy: Ta có $\sin \alpha = \frac{AB}{CB} = \frac{4}{5}$.

Bài toán 53. Dựng góc nhọn α biết $\cos \alpha = 0,25$.

Hướng dẫn: Tương tự như bài 52.

Lời giải



+ Dựng góc $\widehat{xAy} = 90^\circ$. Lấy một đoạn thẳng làm đơn vị.

+ Trên tia Ax lấy điểm B sao cho $AB = 1$.

+ Dựng đường tròn tâm B bán kính bằng 4.

+ lấy C là giao điểm của (B;4) và tia Ay .

+ Nối B và C ta được $\widehat{ABC}$ chính là góc α cần dựng.

Thật vậy: Ta có $\cos \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{4} = 0,25$.

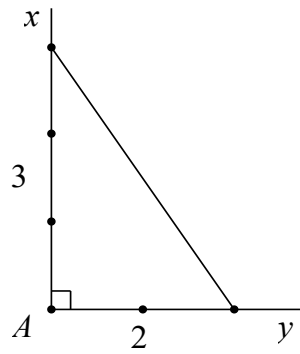
Bài toán 54

a) Dựng góc nhọn α biết $\cot \alpha = \frac{3}{2}$.

b) Dựng góc nhọn α biết $\tan \alpha = \frac{3}{4}$.

Hướng dẫn: Ta đã biết $\tan \alpha$ và $\cot \alpha$ là tỉ số giữa hai cạnh góc vuông. Vậy để dựng được góc α ta đưa về dựng một tam giác vuông biết hai cạnh của góc vuông. Sau đó sử dụng định nghĩa để nhận ra góc α .

Lời giải



Dựng góc $\widehat{xAy} = 90^\circ$.

Trên tia Ax lấy C sao cho $AC = 2$.

Nối B và C ta được chính là góc α cần dựng.

Thật vậy: $\cot \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{2}$.

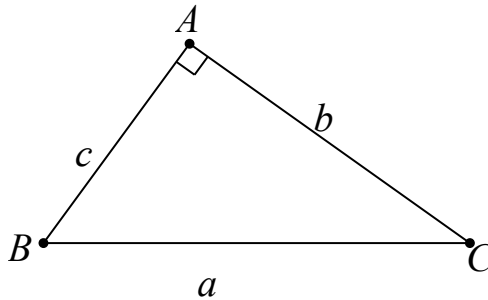
Câu b. học sinh tự làm.

Chương IV. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Bài 12. MỘT SỐ HỆ THỨC GIỮA CẠNH, GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG VÀ ỨNG DỤNG

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hệ thức giữa cạnh và góc trong của tam giác vuông



Định lý 1. Trong tam giác vuông:

- Mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với $\sin$ góc đối hoặc nhân với $\cos$ góc kề.

$$b = a \sin B = a \cos C; c = a \sin C = a \cos B.$$

- Mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh góc vuông còn lại nhân với $\tan$ góc đối hoặc nhân với $\cot$ góc kề.

$$b = c \tan B = c \cot C; c = b \tan C = b \cot B.$$

2. Giải tam giác vuông

Trong một tam giác vuông, nếu cho biết trước hai cạnh (hoặc một góc nhọn và một cạnh) thì ta sẽ tìm được tất cả các cạnh và các góc còn lại của tam giác vuông đó.

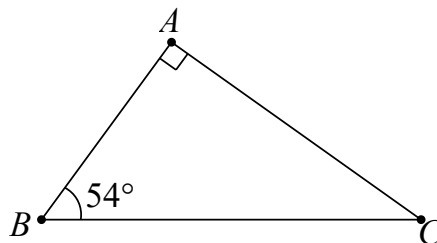
Bài toán này gọi là bài toán giải tam giác vuông.

PHẦN B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

1. Tính cạnh góc vuông khi biết cạnh huyền và một góc nhọn

Bài toán 1: Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 3 \text{ cm}$, $\hat{B} = 54^\circ$. Tính AB và AC .

Lời giải



Ta có $\triangle ABC$, vuông tại A có $\hat{B} = 54^\circ$ và cạnh huyền $BC = 3 \text{ cm}$.

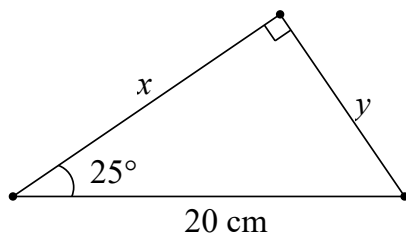
Theo định lý về hệ thức về cạnh và góc của tam giác vuông, ta có:

$$AB = BC \cos 54^\circ = 3 \cdot \cos 54^\circ \approx 1,76(\text{cm}).$$

$$AC = BC \sin 54^\circ = 3 \cdot \sin 54^\circ \approx 2,43(\text{cm}).$$

Bài toán 2: Cho tam giác vuông có cạnh huyền bằng 20 cm và một góc nhọn bằng 25° (xem hình vẽ bên). Tính x , y (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải



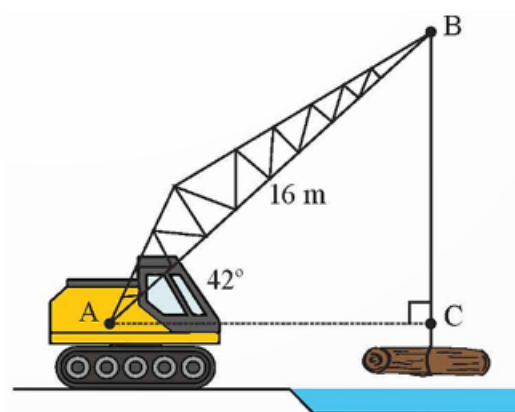
Tam giác đã cho vuông có cạnh huyền bằng 20 cm, cạnh góc vuông x có góc kề bằng 25° .

Ta có: $x = 20 \cdot \cos 25^\circ \approx 18,13(\text{cm})$.

Tương tự cạnh góc vuông y có góc đối bằng 25° .

Ta có: $y = 20 \cdot \sin 25^\circ \approx 8,45(\text{cm})$.

Bài toán 3: Một cần cẩu đang nâng một khối gỗ trên sông biết tay cẩu AB có chiều dài 16 m và nghiêng một góc 42° so với phương nằm ngang (hình vẽ). Tính chiều dài BC của đoạn dây cáp (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



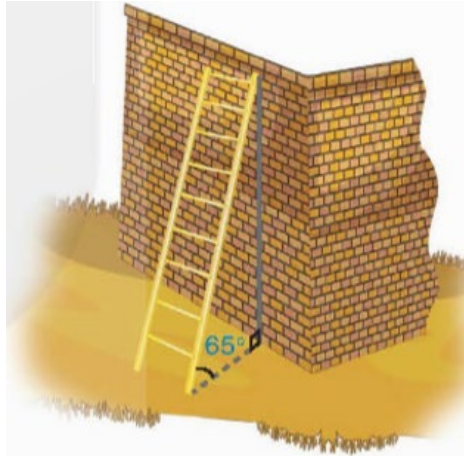
Lời giải

Tam giác ABC vuông tại C có cạnh huyền $AB = 16\text{ m}$, $\widehat{BAC} = 42^\circ$.

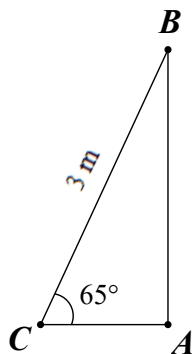
Theo định lý về hệ thức về cạnh và góc của tam giác vuông, ta có:

$$BC = AB \cdot \sin BAC = 16 \cdot \sin 42^\circ \approx 10,7(\text{m}).$$

Bài toán 4: Một chiếc thang dài 3 m. Cần đặt chân thang cách chân tường một khoảng bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến số thập phân thứ hai) để nó tạo được với mặt đất một góc “an toàn” (tức là đảm bảo thang chắc chắn khi sử dụng) (xem hình vẽ).



Lời giải



Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có $\widehat{C} = 65^\circ$ và $BC = 3\text{ m}$

Tính AC .

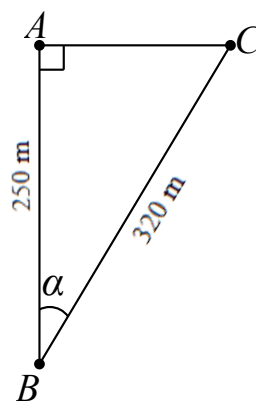
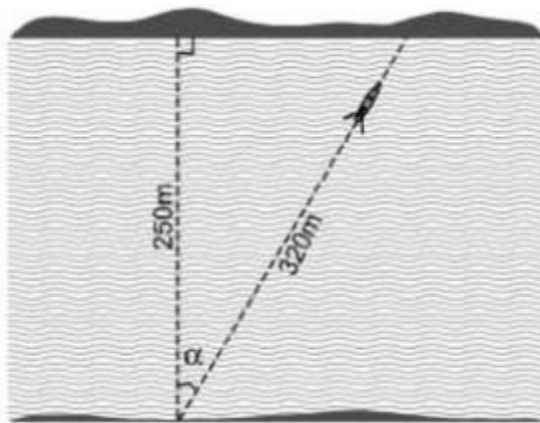
Theo định lý về hệ thức về cạnh và góc của tam giác vuông, ta có:

$$AC = BC \cos C = 3 \cdot \cos 65^\circ \approx 1,27(\text{m}).$$

Vậy để đảm bảo thang chắc chắn khi sử dụng cần đặt chân thang cách chân tường 1,27 m.

Bài toán 5: Một khúc sông rộng 250 m. Một con đò chèo qua sông bị dòng nước đẩy xiên nên phải chèo khoảng hai 320 m mới sang được bờ bên kia. Hỏi dòng nước đã đẩy con đò đi lệch một góc α bằng bao nhiêu độ (làm tròn đến phút)? (Xem hình vẽ).

Lời giải



$\triangle ABC$ vuông tại A có cạnh góc vuông $AB = 250\text{ m}$, cạnh huyền $BC = 320\text{ m}$. Theo định lý về hệ thức về cạnh và góc của tam giác vuông, ta có:

$$AB = BC \cos B \text{ hay } 250 = 320 \cdot \cos \alpha$$

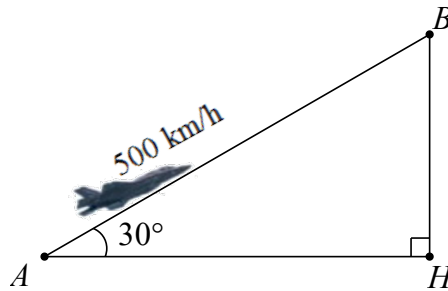
$$\cos \alpha = \frac{250}{320}$$

$$\alpha = 38^\circ 37'$$

Dòng nước đã để con đò đi lệch một góc bằng $38^\circ 37'$.

Bài toán 6. Một chiếc máy bay bay lên với vận tốc 500 km/h đường bay tạo với phương nằm ngang một góc 30° (hình vẽ bên). Hỏi sau 1,2 phút, máy bay bay lên cao được bao nhiêu km theo phương thẳng đứng?

Lời giải



$$\text{Đổi } 1,2 \text{ phút} = \frac{1}{50} \text{ giờ.}$$

Ta có AB là quãng đường máy bay bay lên trong $\frac{1}{50}$ giờ với vận tốc 500 km/h.

$$AB = 500 \cdot \frac{1}{50} = 10 \text{ (km)}$$

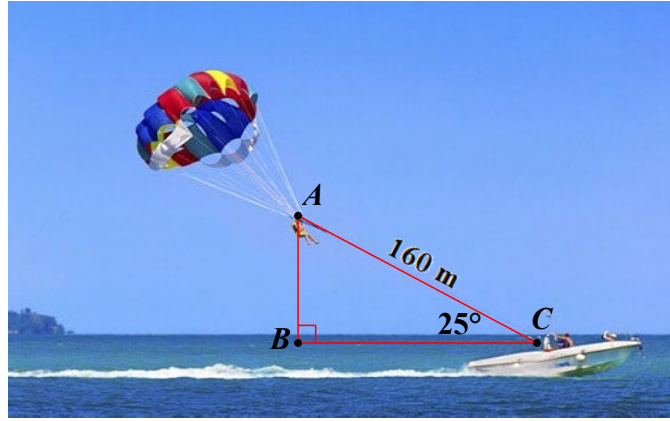
Tam giác ABC vuông tại H có cạnh huyền $AB = 10$ km, $\hat{A} = 30^\circ$. Theo hệ thức về cạnh và góc của tam giác vuông ta có: $BH = AB \cdot \sin A = 10 \cdot \sin 30^\circ = 5 \text{ (km)}$

Vậy sau 1,2 phút (tức $\frac{1}{50}$ giờ) máy bay bay lên cao được 5 km theo phương thẳng đứng.

Bài toán 7. Ca nô dù bay là một trò chơi thể thao mạo hiểm được ưa chuộng trong đó người chơi được đeo dù và được canô kéo bay lên để thưởng ngoạn cảnh biển từ trên cao (xem hình vẽ). Biết độ dài của dây kéo $AC = 160$ m và góc tạo bởi dây kéo và phương nằm ngang $\widehat{ACB} = 25^\circ$.

a) Tính độ cao AB của người chơi so với mặt biển.

b) Muốn bay cao 75 m thì dây kéo phải dài bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười mét)?



Lời giải

a) Tính độ cao AB là cạnh góc vuông của tam giác vuông ABC , biết cạnh huyền $AC = 160\text{ m}$ và $\widehat{ACB} = 25^\circ$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$AB = AC \cdot \sin \widehat{ACB} = 160 \cdot \sin 25^\circ \approx 67,6 \text{ (m)}.$$

b) Khi $AB = 75\text{ m}$. Tính AC .

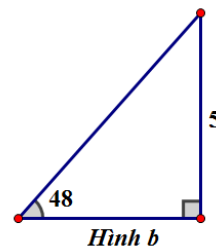
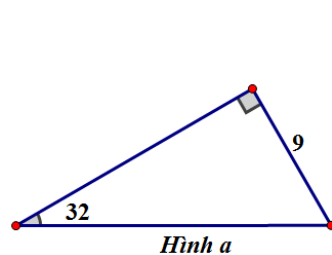
Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có: $AB = AC \cdot \sin 25^\circ$ hay $75 = AC \cdot \sin 25^\circ$.

$$\text{Suy ra: } AC = \frac{75}{\sin 25^\circ} \approx 177,5 \text{ (m)}.$$

Muốn bay cao 75 m thì dây kéo phải dài $177,5\text{ m}$.

II. Tính cạnh góc vuông khi biết cạnh góc vuông còn lại và góc nhọn.

Bài toán 8. Tính cạnh góc vuông x của tam giác vuông của mỗi tam giác vuông trong hình vẽ dưới đây (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

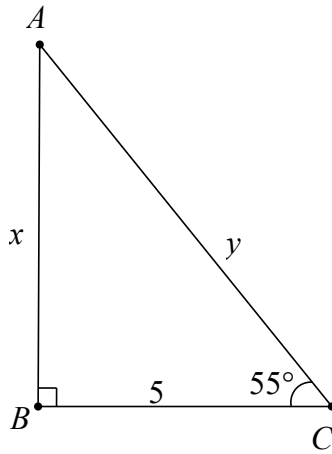
Hình a. Tam giác ở *Hình a* vuông có một cạnh góc vuông là 9 , góc nhọn đối diện với cạnh đó là 32° . Tính cạnh góc vuông còn lại.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có: $x = 9 \cdot \cot 32^\circ \approx 14,4$.

Hình b. Tam giác ở *Hình b* vuông có một cạnh góc vuông là 5 , góc nhọn kề với cạnh đó là 48° . Tính cạnh góc vuông còn lại.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có: $x = 5 \cdot \tan 48^\circ \approx 5,55$.

Bài toán 9. Tính các độ dài x, y trong hình vẽ bên. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

Tam giác ABC vuông tại B .

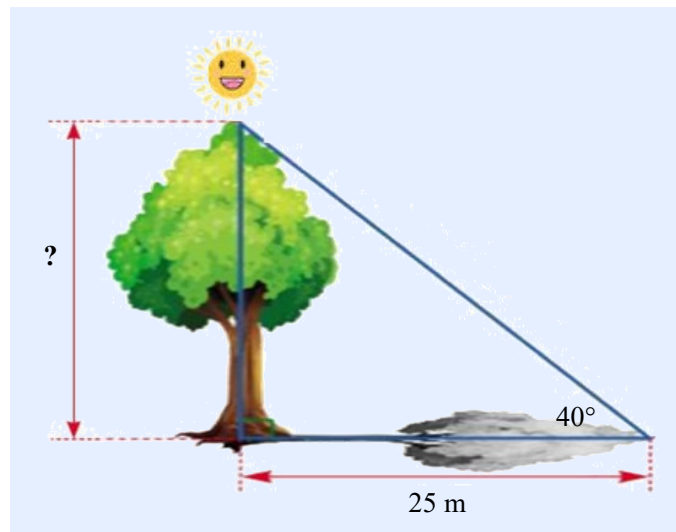
Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$x = AB = BC \cdot \tan 55^\circ = 5 \cdot \tan 55^\circ \approx 7,14.$$

$$\text{Tương tự: } BC = AC \cdot \cos C = y \cdot \cos 55^\circ.$$

$$\text{Vậy } y = \frac{BC}{\cos 55^\circ} = \frac{5}{\cos 55^\circ} \approx 8,72.$$

Bài toán 10. Bóng trên mặt đất của một cây dài 25 m . Tính chiều cao của cây (làm tròn đến hàng đơn vị), biết rằng tia nắng mặt trời tạo với mặt đất góc 40° (Xem hình vẽ).



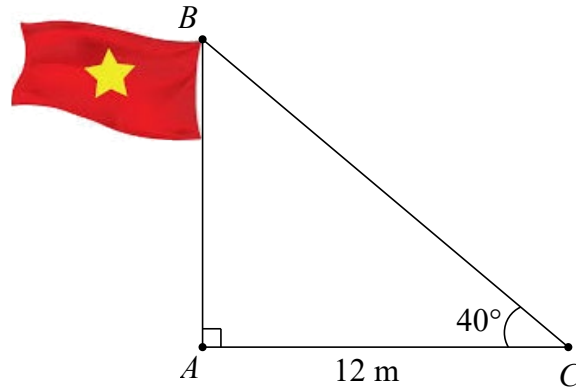
Lời giải

Ta thấy chiều cao của cây đối diện với góc 40° (góc tạo bởi tia nắng mặt trời và bóng của cây trên mặt đất).

$$\text{Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có: } h = 25 \cdot \tan 40^\circ \approx 21 \text{ (m)}.$$

Vậy chiều cao của cây là: 21 m

Bài toán 11. Tam giác ABC ở hình vẽ bên (có $\hat{A} = 90^\circ$) mô tả cột cờ AB và bóng nắng của cột cờ trên mặt đất là AC . Người ta đo được độ dài $AC = 12$ m và $\hat{C} = 40^\circ$. Tính chiều cao AB của cột cờ (làm tròn đến kết quả phần trăm của mét).



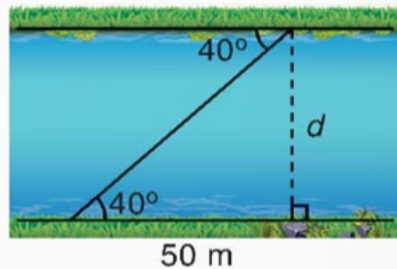
Lời giải

Ta có tam giác ABC vuông tại A có cạnh góc vuông $AC = 12$ m và góc kề với cạnh đó bằng 40° , chiều cao của cột cờ AB là cạnh góc vuông còn lại.

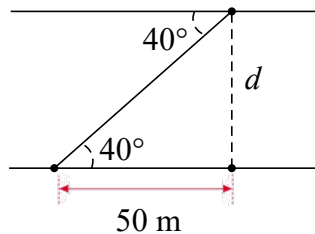
Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$AB = AC \cdot \tan C = 12 \cdot \tan 40^\circ \approx 10,07(\text{m}).$$

Bài toán 12. Tìm chiều rộng d của dòng sông trong hình vẽ bên (làm tròn đến mét)



Lời giải



Chiều rộng d của dòng sông là một cạnh của tam giác vuông khi biết cạnh kia 50 m và góc nhọn $\alpha = 40^\circ$

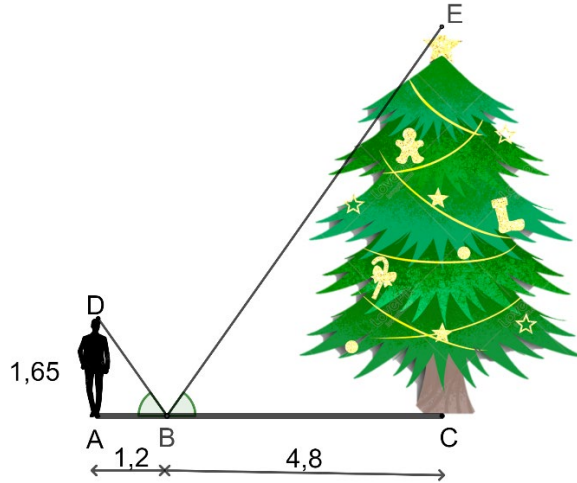
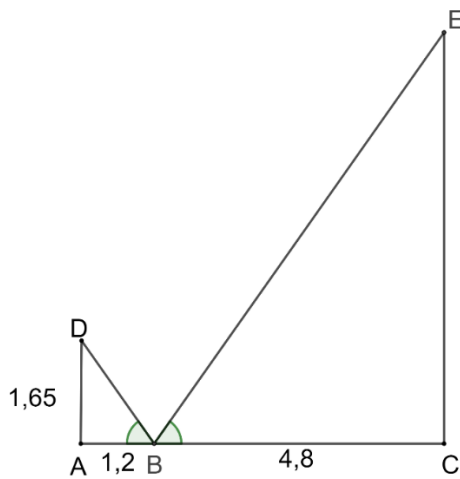
Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$d = 50 \cdot \tan 40^\circ \approx 42(\text{m})$$

Vậy chiều rộng của dòng sông khoảng 42 m.

Bài toán 13. Một người đứng tại điểm A, cách gương phẳng đặt nằm trên mặt đất tại điểm B là 1,2 m, nhìn thấy hình phản chiếu qua gương B của ngọn cây (cây có gốc ở tại điểm C cách B là 44,8 m, B nằm giữa A và C). Biết khoảng cách từ mặt đất đến mắt người đó là 1,65 m. Tính chiều cao của cây (xem hình vẽ).

Lời giải



Gọi α là $\widehat{ABD}$, ta có $\widehat{CBE} = \alpha$ (gt)

Xét tam giác ABD vuông tại A, ta có: $\tan \alpha = \frac{AD}{AB} = \frac{1,65}{1,2}$

Xét tam giác BCE vuông tại C.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$CE = BC \cdot \tan \alpha = 4,8 \cdot \frac{1,65}{1,2} \approx 6,6 \text{ (m)}$$

Vậy chiều cao của cây là 6,6 m.

III. Giải tam giác vuông

Bài toán 1. Giải tam giác ABC vuông tại A có $BC = a, AC = b, AB = c$, trong các trường hợp sau (làm tròn kết quả độ dài đến hàng đơn vị, số đo góc đến độ).

a) $a = 21, h = 18$

b) $\widehat{C} = 50^\circ, a = 8$

c) $\widehat{C} = 30^\circ, c = 5$

d) $\widehat{C} = 30^\circ, b = 10$

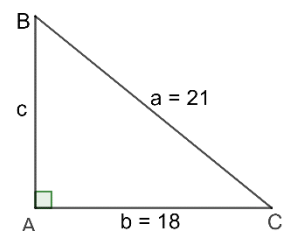
e) $c = 4, b = 6$

Lời giải

a) Ta có: $\cos C = \frac{b}{a} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$, suy ra $\widehat{C} = 31^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{B} = 90^\circ - 31^\circ = 59^\circ$$

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:



$$c = a \cdot \sin C = 21 \cdot \sin 31^\circ \approx 11.$$

b) Ta có tam giác ABC vuông tại A,

$$\text{có } \hat{C} = 50^\circ \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$c = a \cdot \sin C = 8 \cdot \sin 50^\circ \approx 6.$$

$$\text{Tương tự } b = a \cdot \cos C = 8 \cdot \cos 50^\circ \approx 5.$$

c) Ta có tam giác ABC vuông tại A : $\hat{C} = 30^\circ \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$c = a \cdot \cot 30^\circ = 5 \cdot \cot 30^\circ = 5\sqrt{3}.$$

$$c = a \cdot \sin C \Rightarrow a = \frac{c}{\sin C} = \frac{5}{\sin 30^\circ} = 10.$$

Cách khác:

Để tính cạnh huyền a. Vì ABC vuông có $\hat{C} = 30^\circ$ và $c = 5$ nên cạnh huyền $a = 10$

d) Tam giác ABC vuông tại A, có $\hat{C} = 30^\circ \rightarrow \hat{B} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$c = b \cdot \tan 30^\circ = 10 \cdot \tan 30^\circ = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

$$b = a \cdot \cos C \Rightarrow a = \frac{b}{\cos C} = \frac{10}{\cos 30^\circ} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

Nhận xét: Khi $\triangle ABC$ vuông tại A có $\hat{C} = 30^\circ$ và $c = \frac{10\sqrt{3}}{3}$, ta kết luận $a = \frac{20\sqrt{3}}{3}$.

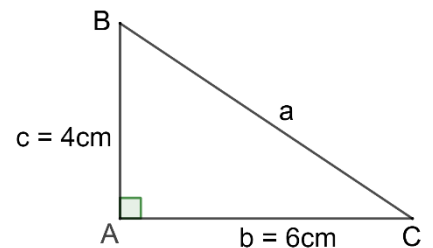
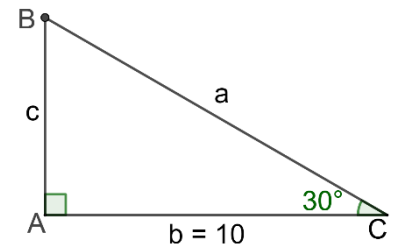
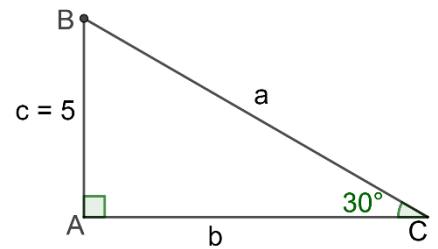
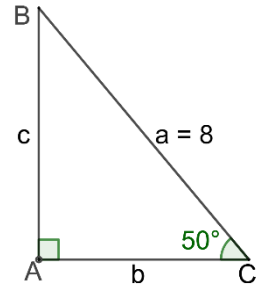
e) Tam giác $\triangle ABC$ vuông tại A.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$b = c \cdot \tan B \Rightarrow \tan B = \frac{b}{c} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Suy ra } \hat{B} = 56^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ - 56^\circ = 34^\circ.$$

$$\text{Lại có } b = a \cdot \sin B \Rightarrow a = \frac{b}{\sin B} = \frac{6}{\sin 56^\circ} \approx 7.2 (cm).$$



Bài toán 2. Giải tam giác ABC vuông tại A biết:

$$\sin C = 0,6 \text{ và } AC = 6.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin C = 0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = \frac{AB}{BC}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{3}{5}BC$$

$$\text{Áp dụng định lý Pythagore : } BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2 = BC^2 - \left(\frac{3}{5}BC\right)^2$$

$$\Rightarrow 6^2 = BC^2 - \frac{9}{25}BC^2 \Rightarrow 6^2 = \frac{16}{25}BC^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = \frac{6^2}{\frac{16}{25}} = 56,25 \Rightarrow BC = 7,5$$

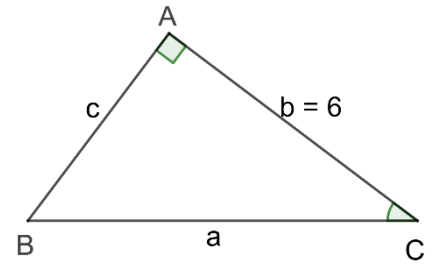
$$\text{Áp dụng định lý Pythagore: } a^2 = b^2 + c^2$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = (7,5)^2 - 6^2 = 20,25$$

$$\Rightarrow c = 4,5$$

$$\text{Vì } \sin C = 0,6 (\text{gt}) \Rightarrow \hat{C} \approx 36^\circ 52'$$

$$\text{Do đó } \hat{B} \approx 90^\circ - 36^\circ 52' \approx 53^\circ 08'$$



Bài toán 3. Cho tam giác ABC vuông tại A biết $AB = 9\text{cm}$; $\hat{C} = 30^\circ$

a) Giải tam giác vuông ABC.

b) Kẻ đường cao AH của tam giác ABC. Tính AH, BH.

c) Tính độ dài đường phân giác AD của tam giác ABC. (Số đo độ dài làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

a) Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$c = a \cdot \sin C \Rightarrow a = \frac{c}{\sin C} = \frac{9}{\sin 30^\circ} = \frac{9}{\frac{1}{2}} = 18(\text{cm}).$$

Nhận xét: Ta có thể thấy trong tam giác vuông có góc 30° thì cạnh đối diện góc 30° bằng nửa cạnh huyền.

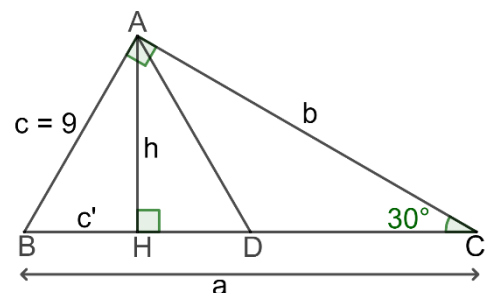
$$\text{Lại có } c = b \cdot \tan C$$

$$\Rightarrow b = \frac{c}{\tan C} = \frac{9}{\tan 30^\circ} = 9\sqrt{3}(\text{cm})$$

$$\text{Dễ thấy } \hat{B} = 90^\circ - \hat{C} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

Xét tam giác AHB vuông tại H, có $\hat{B} = 60^\circ$ (chứng minh trên) và cạnh huyền $AB = 9\text{ cm}$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:



$$AH = AB \cdot \sin B = 9 \cdot \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{2} \approx 7,79(\text{cm})$$

$$BH = AB \cdot \cos B = 9 \cdot \cos 60^\circ = 4,5(\text{cm})$$

Nhận xét: Như trên ta có ngay BH là cạnh đối diện góc 30° trong tam giác vuông nên

$$BH = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 9 = 4,5(\text{cm})$$

b) Tam giác ABC có phân giác AD (gt) ta có:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{9}{9\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{DB}{1} = \frac{DC}{\sqrt{3}} = \frac{DB+DC}{1+\sqrt{3}} = \frac{BC}{1+\sqrt{3}} = \frac{a}{1+\sqrt{3}} = \frac{18}{1+\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow BD = \frac{18}{1+\sqrt{3}} \approx 6,59$$

$$\Rightarrow HD = BD - BH = 6,59 - 4,5 \approx 2,09(\text{cm}).$$

Áp dụng định lí Pythagore cho tam giác vuông AHD, ta có:

$$AD^2 = AH^2 + HD^2 = (7,79)^2 + (2,09)^2 \approx 65,11$$

$$\Rightarrow AD \approx 8,07(\text{cm}).$$

Bài toán 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 21cm, BC = 35cm

a) Giải tam giác vuông ABC.

b) Tính độ dài phân giác AD và đường cao AH (số đo độ dài làm tròn đến số thập phân thứ hai, số đo góc làm tròn đến phút).

Lời giải

a) Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AB = BC \cdot \sin C$$

$$\Rightarrow \sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{21}{35}$$

$$\text{Suy ra } \hat{C} \approx 36^\circ 52'$$

$$\Rightarrow \hat{B} \approx 90^\circ - 36^\circ 52' \approx 53^\circ \approx 53^\circ 08'$$

$$AC = BC \cdot \sin B = 35 \cdot \sin 53^\circ 08' \approx 27,98(\text{cm})$$

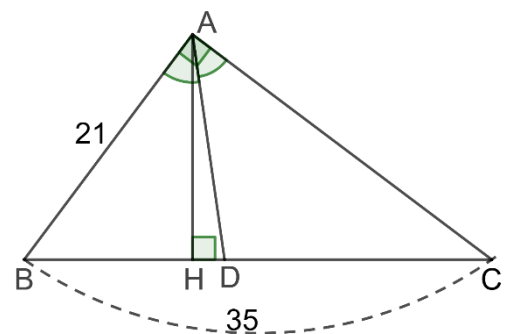
Xét tam giác vuông AHB có cạnh huyền

$$AB = 21(\text{cm})(\text{gt})$$

$$\hat{B} \approx 53^\circ 08', \text{ ta có } AH = AB \cdot \sin B = 21 \cdot \sin 53^\circ 08' \approx 16,79(\text{cm})$$

b) AD là phân giác của ΔABC ta có: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow \frac{DB}{3} = \frac{DC}{4} = \frac{DB+DC}{3+4} = \frac{BC}{7} = \frac{35}{7} = 5$$



$$\Rightarrow DB = 3.5 = 15(\text{cm}).$$

Cũng trong tam giác AHB, ta có:

$$BH = AB \cdot \cos B = 21 \cdot \cos 53^\circ 08' \approx 12,60(\text{cm}).$$

$$\text{Do đó } HD = DB - BH = 15 - 12,6 = 2,4(\text{cm})$$

Theo định lý Pythagore, ta có: $AD^2 = AH^2 + HD^2 = (16,79)^2 + (2,4)^2 \approx 276,14$

$$\Rightarrow AD \approx \sqrt{276,14} \approx 16,62(\text{cm})$$

Bài toán 5. Tính các cạnh của hình chữ nhật ABCD (xem hình vẽ) biết đường chéo $AC = 16 \text{ cm}$ và $\widehat{BAC} = 68^\circ$.

Lời giải

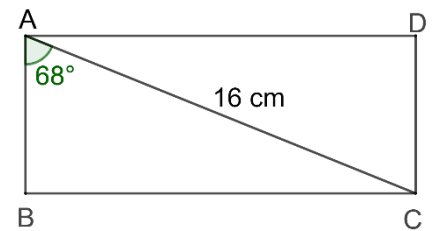
Tam giác ABC vuông tại B có cạnh huyền $AC = 16 \text{ cm}$, góc nhọn $\widehat{BAC} = 68^\circ$

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AB = AC \cdot \cos BAC = 16 \cdot \cos 68^\circ \approx 6,0(\text{cm})$$

$$\text{Lại có } BC = AC \cdot \sin BAC = 16 \cdot \sin 68^\circ \approx 14,8(\text{cm}).$$

Vậy chiều rộng của hình chữ nhật là $6,0 \text{ cm}$ và chiều dài là $14,8 \text{ cm}$.



Bài toán 6. Tính độ dài cạnh bên CD của hình thang ABCD trong hình vẽ bên.

Lời giải

Xét tam giác AHB vuông tại H có cạnh huyền $AB = 9$, góc nhọn $\widehat{B} = 66^\circ$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$BH = AB \cdot \cos B = 9 \cdot \cos 66^\circ \approx 3,66$$

$$AH = AB \cdot \sin B = 9 \cdot \sin 66^\circ \approx 8,22$$

Dễ thấy $HK = AD = 10$

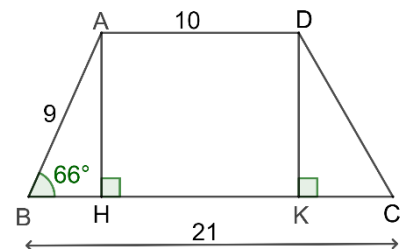
$$\Rightarrow KC = BC - (BH + HK) = 21 - (3,66 + 10) = 7,34$$

Kẻ đường cao DK của hình thang ABCD.

Xét tam giác DKC vuông tại K có hai cạnh góc vuông $DK = AH = 8,22$; $KC = 7,34(\text{cm})$

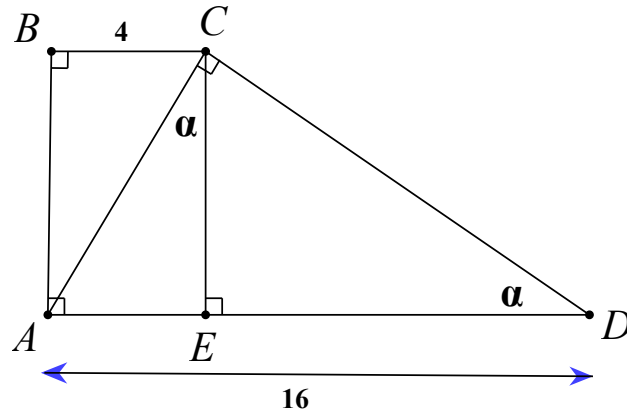
Theo định lý Pythagore, ta có:

$$DC^2 = DK^2 + KC^2 = (8,22)^2 + (7,34)^2 = \frac{2429}{20} \Rightarrow DK \approx 11,0$$



Bài toán 7. Cho hình thang ABCD ($AD \parallel BC$) có $AD = 16 \text{ cm}$, $BC = 4 \text{ cm}$ và $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{ACD} = 90^\circ$. Kẻ đường cao CD của tam giác ACD. Chứng minh $\widehat{ADC} = \widehat{ACE}$. Tính sin của các góc $\widehat{ADC}$, $\widehat{ACE}$ và suy ra $AC^2 = AE \cdot AD$. Từ đó tính AC.

Lời giải



Ta có $\triangle ACD$ vuông tại C (gt)

$$\Rightarrow \widehat{ADC} + \widehat{CAD} = 90^\circ \quad (1)$$

Tương tự $\triangle ACE$ vuông tại E (gt)

$$\Rightarrow \widehat{ACE} + \widehat{CAD} = 90^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{ACE}$.

Dễ thấy tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật

$$\Rightarrow AE = BC = 4 \text{ cm} \Rightarrow ED = AD - EA = 16 - 4 = 12 \text{ cm}.$$

Xét $\triangle AEC$ và $\triangle CED$ có:

$$\widehat{AEC} = \widehat{CED} - 90^\circ \text{ (gt)}, \widehat{ACE} = \widehat{ADC} \text{ (Chứng minh trên)}$$

Do đó $\triangle AEC \sim \triangle CED$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{CE}{DE} = \frac{AE}{CE} \Rightarrow CE^2 = AE \cdot DE = 4 \cdot 12 = 48$$

$$\Rightarrow CE = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Đặt $\alpha = \widehat{ADC}$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, xét $\triangle AEC$, ta có:

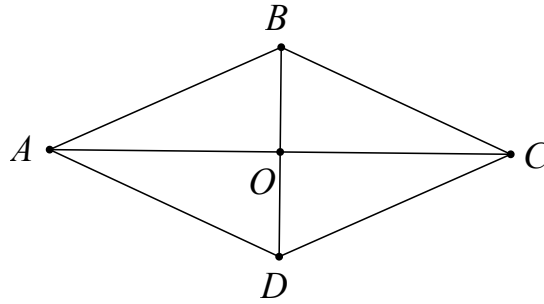
$$AE = CE \cdot \tan \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{AE}{CE} = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Do đó } \alpha = 30^\circ \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2} \text{ hay } \sin ADC = \sin ACE = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ta có } \sin 30^\circ = \frac{AE}{AC} \Rightarrow AC = \frac{AE}{\sin 30^\circ} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8 \text{ cm}.$$

Bài toán 8. Tính các góc của hình thoi có hai đường chéo dài $2\sqrt{3}$ và 2

Lời giải



Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD của hình thoi ABCD.

Ta có $OA = OC = \frac{AC}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$ và $OB = OD = \frac{BD}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Lại có $AC \perp BD$ tại O (tính chất hai đường chéo của hình thoi).

Xét tam giác AOB vuông tại O.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$OB = OA \cdot \tan OAB \Rightarrow \tan OAB = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ suy ra } \widehat{OAB} = 30^\circ$$

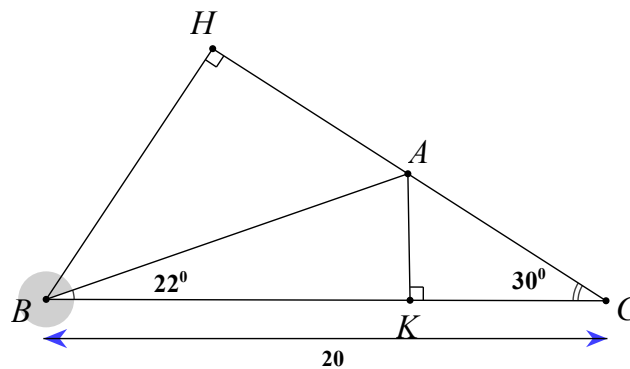
$$\Rightarrow \widehat{BAD} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Vậy $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 60^\circ$ và $\widehat{ADC} = \widehat{ABC} = 120^\circ$.

Bài toán 9. Cho tam giác ABC có $BC = 20 \text{ cm}$, $\widehat{ABC} = 22^\circ$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$.

- Tính khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng AC.
- Tính các cạnh và các góc còn lại của tam giác ABC.
- Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC.

Lời giải



- Gọi BH là khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng AC.

Tam giác BHC vuông tại H có $\widehat{C} = 30^\circ$, cạnh huyền $BC = 20 \text{ cm}$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có: $BH = BC \cdot \sin C = 20 \cdot \sin 30^\circ = 10 \text{ cm}$.

- Ta có: $\widehat{BAC} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^\circ - (22^\circ + 30^\circ) = 128^\circ$.

Ta có: $\widehat{BAC} + \widehat{BAH} = 180^\circ$ (kề bù)

$$\Rightarrow \widehat{BAH} = 180^\circ - \widehat{BAC} = 180^\circ - 128^\circ = 52^\circ$$

Xét tam giác BHA vuông tại H, có cạnh góc vuông $BH = 10 (\text{cm})$, góc nhọn $\widehat{BAH} = 52^\circ$

(cmt).

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$BH = BA \cdot \sin BAH \Rightarrow BA = \frac{BH}{\sin BAH} = \frac{10}{\sin 52^\circ} \approx 12,7 \text{ (cm)}$$

Lại có: $HA = BH \cdot \cot BAH = 10 \cdot \cot 52^\circ \approx 7,8 \text{ (cm)}$

Xét tam giác BHC vuông tại H , có cạnh huyền $BC = 120 \text{ (cm)}$, góc nhọn $\widehat{C} = 30^\circ$ (gt).

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$HC = BC \cdot \cos C = 120 \cdot \cos 30^\circ = 104\sqrt{3} \approx 17,3 \text{ (cm)}$$

Ta có: $HC = HA + AC \Rightarrow AC = HC - HA \approx 17,3 - 7,8 \approx 9,5 \text{ (cm)}$.

Vậy góc còn lại của tam giác ABC là $\widehat{BAC} = 128^\circ$, cạnh $AB \approx 12,7 \text{ (cm)}$, cạnh $AC \approx 9,5 \text{ (cm)}$.

c) Gọi khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC là AK .

Xét tam giác AKB vuông tại K có cạnh huyền $AB \approx 12,7 \text{ (cm)}$, $\widehat{ABC} = 22^\circ$.

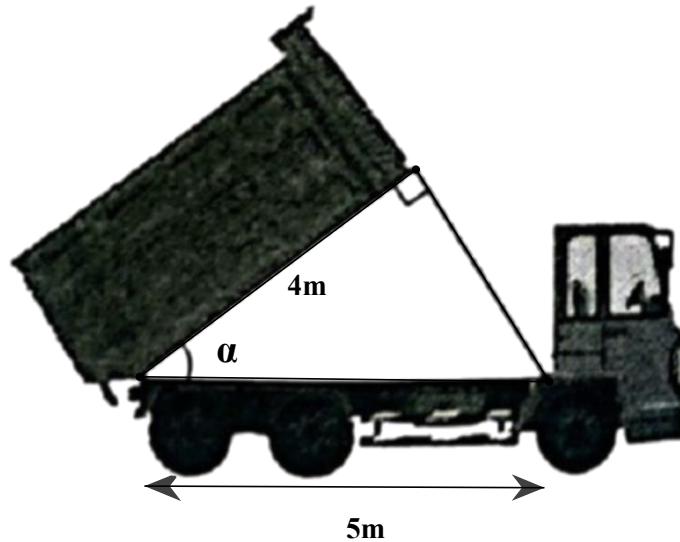
Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

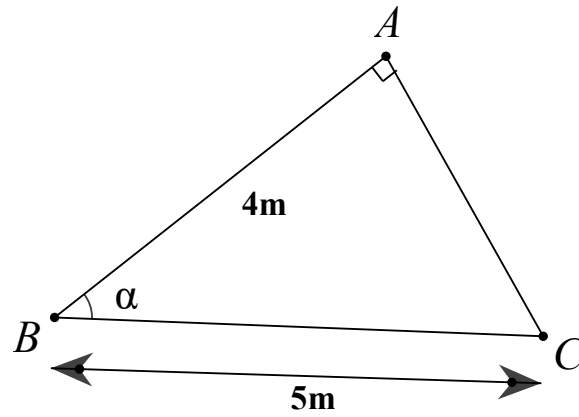
$$AK = AB \cdot \sin ABC \approx 12,7 \cdot \sin 22^\circ \approx 4,8 \text{ (cm)}.$$

Vậy khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC là $4,8 \text{ (cm)}$.

Bài toán 10. Tính góc nghiêng α của thùng xe chở rác trong hình vẽ bên.

Lời giải





(Xem hình vẽ bên).

Tam giác ABC vuông tại A , có cạnh huyền $BC = 5\text{ m}$, cạnh góc vuông $AB = 4\text{ m}$.

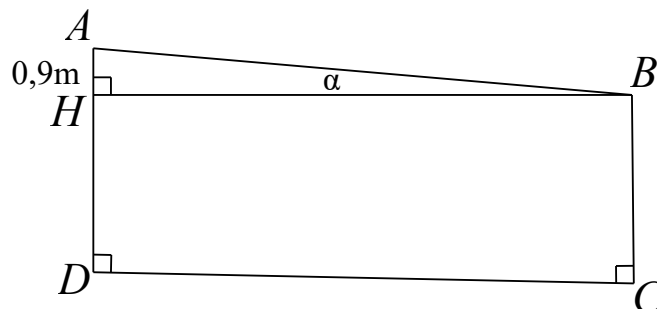
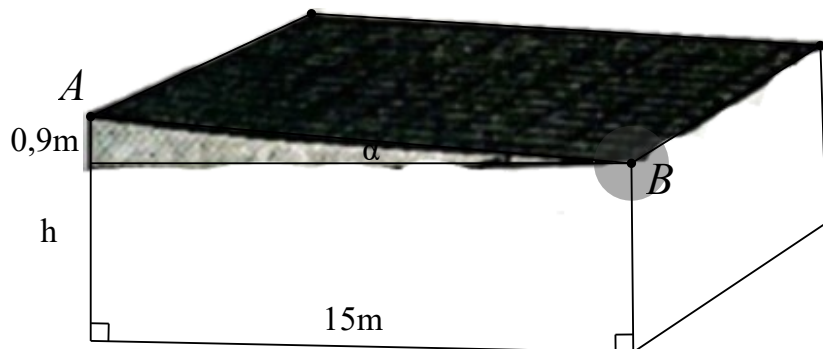
Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AB = BC \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha \approx 36^\circ 52'$$

Vậy góc nghiêng α của thùng xe chở rác gần bằng $36^\circ 52'$

Bài toán 11. Tìm góc nghiêng α và chiều rộng của mái nhà kho trong hình vẽ bên.

Lời giải



(Xem hình vẽ bên).

Dễ thấy tứ giác $HBCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow BH = DC = 15\text{ (cm)}$

Xét tam giác AHB vuông tại H , có hai cạnh góc vuông $HB = 15\text{ m}$, $HA = 0,9\text{ m}$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$HA = HB \cdot \tan \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{HA}{HB} = \frac{0,9}{15} \Rightarrow \alpha \approx 3^\circ 26'.$$

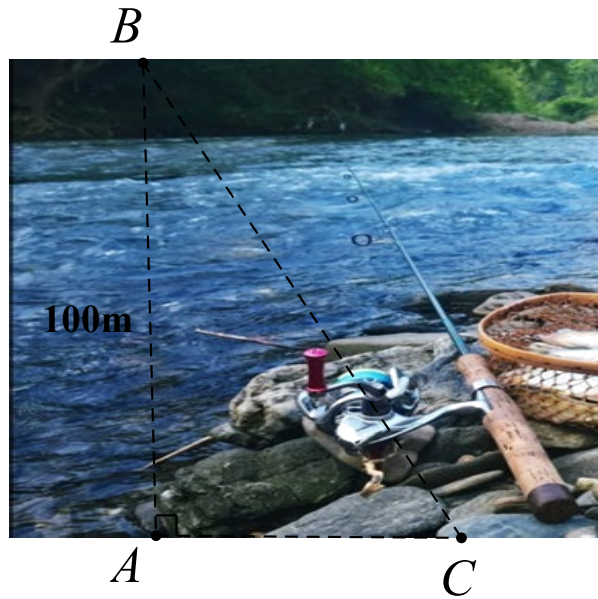
Ta có: $AH = AB \cdot \sin \alpha \Rightarrow AB = \frac{AH}{\sin \alpha} = \frac{0,9}{\sin 3^\circ 26'} \approx 15,03 (m)$

Cách khác: Có thể áp dụng định lý Pythagore, ta có:

$$AB^2 = HA^2 + HB^2 = (0,9)^2 + 15^2 \approx \frac{22581}{100} \Rightarrow AB \approx 15,03 (m).$$

Bài toán 12. Hình vẽ bên dưới minh họa một phần con sông có bề rộng $AB = 100 m$. Một chiếc thuyền đi thẳng từ vị trí B bên này bờ đến vị trí C bên kia bờ sông. Tính quãng đường BC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét), biết $\widehat{ABC} = 35^\circ$.

Lời giải



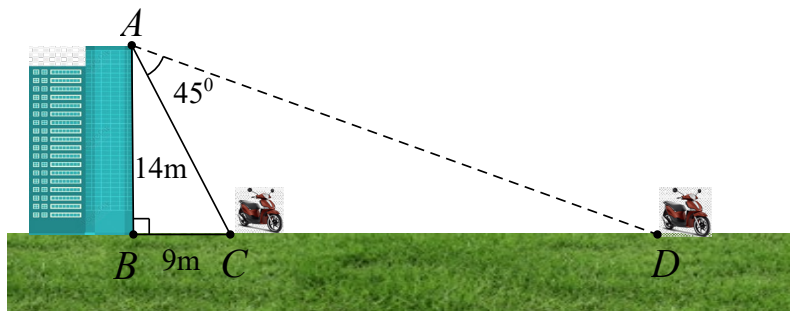
Xét tam giác BAC vuông tại A có cạnh góc vuông $AB = 100 m$, góc nhọn $B = 35^\circ$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AB = BC \cdot \cos B \Rightarrow BC = \frac{AB}{\cos B} = \frac{100}{\cos 35^\circ} \approx 122,1 (m)$$

Vậy quãng đường BC dài $122,1 (m)$.

Bài toán 13. Một người đứng từ sân thượng toà nhà và quan sát một người đi xe máy từ vị trí C đến D (xem hình vẽ).



a) Giải tam giác vuông ABD .

b) Tính tốc độ của xe máy, biết thời gian xe đi từ C đến D là 6,5 giây. Làm tròn số đo góc đến độ và độ dài cạnh đến hàng phần mười mét.

Lời giải

a) Xét $\triangle ABC$ vuông tại B có hai cạnh góc vuông $AB = 14\text{ m}$, $BC = 9\text{ m}$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$BC = AB \cdot \tan BAC \Rightarrow \tan BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{9}{14} \Rightarrow \widehat{BAC} \approx 32^\circ 44'.$$

Lại có $\widehat{BAD} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD} = 32^\circ 44' + 45^\circ \approx 77^\circ 44'$

$$\Rightarrow \widehat{D} \approx 90^\circ - 77^\circ 44' \approx 12^\circ.$$

Xét tam giác ABD vuông tại B có cạnh góc vuông $AB = 14\text{ m}$, $\widehat{D} = 12^\circ$. Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AB = AD \cdot \sin D \Rightarrow AD = \frac{AB}{\sin D} = \frac{14}{\sin 12^\circ} \approx 67(\text{ m})$$

Lại có $AB = BD \cdot \tan D \Rightarrow BD = \frac{AB}{\tan D} = \frac{14}{\tan 12^\circ} \approx 66(\text{ m})$.

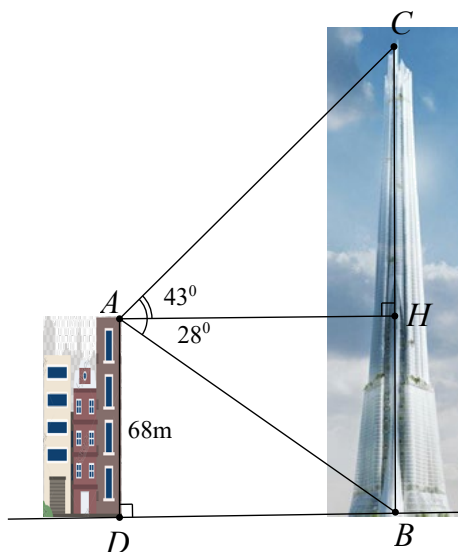
b) Ta có quãng đường xe máy đi từ C đến D là:

$$CD = BD - BC \approx 66 - 9 = 57(\text{ m}) = 0,057(\text{ km})$$

Thời gian $\text{giây} = \frac{6,5}{3600}(\text{ h})$

Vậy vận tốc của xe máy là: $\frac{0,057}{\left(\frac{6,5}{3600}\right)} = 31,5 \approx 32 \text{ km/h}.$

Bài toán 14. Từ vị trí A ở phía trên một toà nhà có chiều cao $AD = 68\text{ m}$, bác Duy nhìn thấy vị trí C cao nhất của một tháp truyền hình, góc tạo bởi tia AH theo phương nằm ngang là $\widehat{CAH} = 43^\circ$. Bác Duy cũng nhìn thấy chân tháp tại vị trí B mà góc tạo bởi tia AB và tia AH là $\widehat{BAH} = 28^\circ$, điểm H thuộc đoạn thẳng BC (hình vẽ). Tính khoảng cách BD từ chân tháp đến chân toà nhà và chiều cao BC của tháp truyền hình (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).



Lời giải

Dễ thấy $\widehat{ABD} = \widehat{HAB} = 28^\circ$ (so le trong).

Xét tam giác ADB có cạnh góc vuông $AD = 68 \text{ m}$ và $\widehat{ABD} = 28^\circ$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AD = BD \cdot \tan 28^\circ \Rightarrow BD = \frac{AD}{\tan 28^\circ} = \frac{68}{\tan 28^\circ} \approx 127,9 \text{ (m)}.$$

Vậy khoảng cách từ chân tháp đến chân toà nhà $BD = 127,9 \text{ (m)}$.

Ta có tứ giác $AHBD$ là hình chữ nhật

$$\Rightarrow AH = BD = 127,9 \text{ (m)} \text{ và } BH = AD = 68 \text{ m}.$$

Tam giác AHC vuông tại H , có cạnh góc vuông $AH = 127,9 \text{ (m)}$, góc nhọn $\widehat{CAH} = 43^\circ$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$CH = AH \cdot \tan CAH \approx 127,9 \cdot \tan 43^\circ \approx 119,3 \text{ (m)}.$$

Vậy chiều cao BC của tháp truyền hình là:

$$BC = BH + HC \approx 68 + 119,3 \approx 187,3 \text{ (m)}.$$

Bài toán 15. Năm 1990, tháp nghiêng ở thành phố Pisa (Italia) bắt đầu quá trình trùng tu nhằm giảm độ nghiêng của tháp. Sau 10 năm trùng tu, vào năm 2001, các kỹ sư đã thành công trong việc đưa độ nghiêng của tháp chỉ còn khoảng 4° (nguồn: https://en.wikipedia/wiki/Leaning_tower_of_Pisa). Giả sử một người đứng trên tháp (tại vị trí A), cách mặt đất một khoảng là $AH = 45 \text{ m}$, thả một vật rơi xuống đất (hình vẽ bên). Tính khoảng cách từ vị trí chạm đất (vị trí H) đó đến chân tháp (vị trí B) (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét).



Lời giải

Ta có khoảng cách từ vị trí chạm đất đến chân tháp là BH .

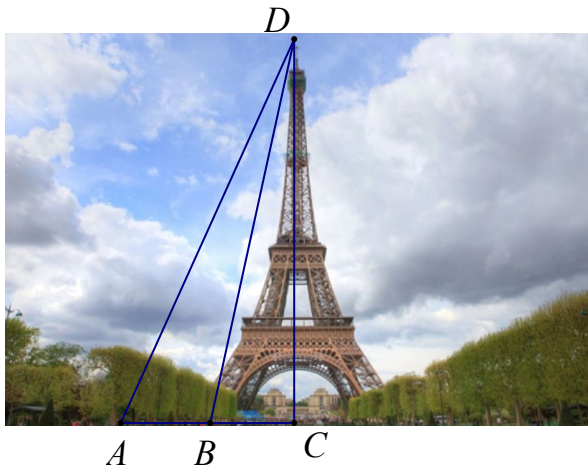
Tam giác AHB vuông tại H có cạnh góc vuông $AH = 45 \text{ m}$, góc nhọn $\widehat{BAH} = 4^\circ$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

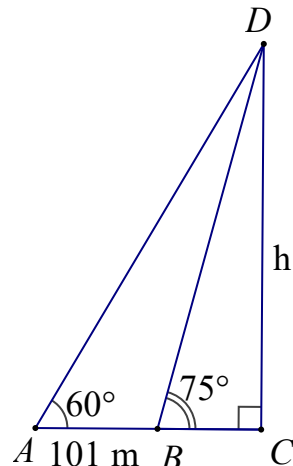
$$BH = AH \cdot \tan BAH = 45 \cdot \tan 4^\circ = 3,15 \text{ (m)}$$

Vậy khoảng cách từ vị trí chạm đất đến chân tháp là gần 3,15 (m).

Bài toán 16. Trong lần đến tham quan tháp Eiffel (ở Thủ đô Paris, Pháp), bạn Vân muốn ước tính độ cao của tháp. Sau khi quan sát, bạn Vân đã minh hoạ lại kết quả đo đạc ở hình vẽ dưới đây. Em hãy giúp bạn Vân tính độ cao h của tháp Eiffel theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Hình 1



Hình 2

Lời giải

Xem hình vẽ 2

Ta có tam giác ACD vuông tại C có cạnh góc vuông $DC = h$, góc nhọn $\widehat{DAC} = 60^\circ$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AC = h \cdot \cot DAC = h \cdot \cot 60^\circ$$

Xét tam giác BDC vuông tại C có cạnh góc vuông $CD = h$, góc nhọn $\widehat{CBD} = 75^\circ$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$BC = h \cdot \cot 75^\circ$$

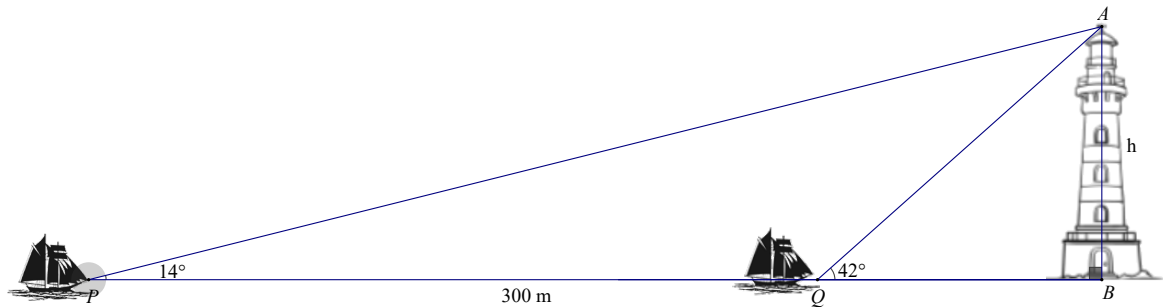
$$\text{mà } AC - BC = AB \text{ hay } h \cdot \cot 60^\circ - h \cdot \cot 75^\circ = 101$$

$$\Rightarrow h(\cot 60^\circ - \cot 75^\circ) = 101 \Rightarrow h = \frac{101}{\cot 60^\circ - \cot 75^\circ} = 326$$

Vậy tháp Eiffel có độ cao khoảng 326 (m).

Bài toán 17. Hai con thuyền P và Q cách nhau 300 m và thẳng hàng với chân B của tháp hải đăng trên bờ biển (hình vẽ dưới đây). Từ P và Q, người ta nhìn thấy tháp hải đăng dưới các góc $\widehat{BPA} = 14^\circ$ và $\widehat{BQA} = 42^\circ$. Đặt $h = AB$ là chiều cao của tháp hải đăng.

a) Tính BQ và BP theo h .



b) Tính chiều cao của tháp hải đăng (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Lời giải

a) Xét tam giác ABQ vuông tại B , có cạnh góc vuông $AB = h$ và góc nhọn $\widehat{AQB} = 42^\circ$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AB = BQ \cdot \tan AQB \Rightarrow BQ = \frac{AB}{\tan AQB} = \frac{h}{\tan 42^\circ}$$

b) Xét tam giác ABP vuông tại B , có cạnh góc vuông $AB = h$ và góc nhọn $\widehat{P} = 14^\circ$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AB = BP \cdot \tan P \Rightarrow BP = \frac{AB}{\tan 14^\circ} = \frac{h}{\tan 14^\circ}$$

$$\text{mà } BP = BQ + PQ \Rightarrow PQ = BP - BQ \text{ hay } 300 = \frac{h}{\tan 14^\circ} - \frac{h}{\tan 42^\circ}$$

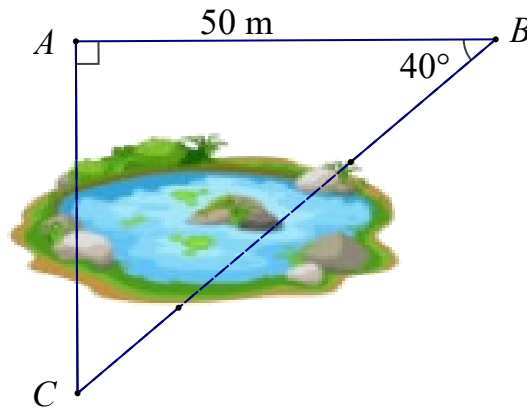
$$\Rightarrow 300 = \frac{h \cdot \tan 42^\circ - h \cdot \tan 14^\circ}{\tan 14^\circ \cdot \tan 42^\circ} = \frac{h \cdot (\tan 42^\circ - \tan 14^\circ)}{\tan 14^\circ \cdot \tan 42^\circ}$$

$$\Rightarrow 300 \cdot \tan 14^\circ \cdot \tan 42^\circ = h \cdot (\tan 42^\circ - \tan 14^\circ)$$

$$\Rightarrow h = \frac{300 \cdot \tan 14^\circ \cdot \tan 42^\circ}{\tan 42^\circ - \tan 14^\circ} \approx 103,4 \text{ (m)}$$

Vậy chiều cao của tháp hải đăng khoảng 103,4(m)

Bài toán 18. Hình vẽ bên mô tả ba vị trí A, B, C là ba đỉnh của một tam giác vuông và không đo được trực tiếp các khoảng cách từ C đến A và từ C đến B. Biết $AB = 50 \text{ m}$, $\widehat{ABC} = 40^\circ$. Tính khoảng cách CA và CB (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).



Lời giải

Xét tam giác BAC vuông tại A , có cạnh góc vuông $AB = 50\text{ m}$ góc nhọn $\widehat{ABC} = 40^\circ$.

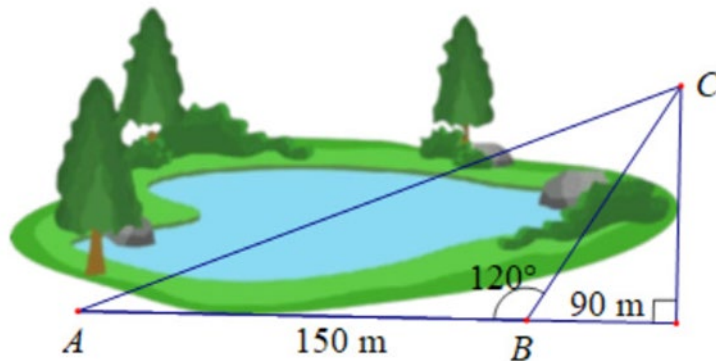
Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AC = AB \cdot \tan B = 50 \cdot \tan 40^\circ \approx 42\text{ (m)}$$

$$\text{Lại có } AB = BC \cdot \cos B \Rightarrow BC = \frac{AB}{\cos B} = \frac{50}{\cos 40^\circ} \approx 65\text{ (m)}$$

Vậy các khoảng cách $CA = 42\text{ (m)}$ $CB = 65\text{ (m)}$.

Bài toán 19. Một bạn muốn tính khoảng cách giữa hai điểm A, B ở hai bên hồ nước. Biết rằng các khoảng cách từ một điểm C đến A và đến B là $CA = 90\text{ m}$, $CB = 150\text{ m}$ và $\widehat{ACB} = 120^\circ$ (hình vẽ bên). Hãy tính AB giúp bạn.



Lời giải

Ta có $\widehat{ACB} + \widehat{ACH} = 180^\circ$ (kề bù)

$$\Rightarrow \widehat{ACH} = 180^\circ - \widehat{ACB} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

Trong tam giác vuông AHC có cạnh huyền $AC = 90\text{ m}$, góc nhọn $\widehat{ACH} = 60^\circ$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AH = AC \cdot \sin ACH = 90 \cdot \sin 60^\circ = 45\sqrt{3} \approx 77,9\text{ (m)}$$

$$CH = AC \cdot \cos ACH = 90 \cdot \cos 60^\circ = 45\text{ (m)}$$

Cách khác:

Có thể xét $\triangle AHC$ vuông tại H có $\widehat{CAH} = 90^\circ - \widehat{ACH} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

$$\text{Mà cạnh huyền } 90 \text{ m} \Rightarrow CH = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot 90 = 45 \text{ (m)}$$

$$\text{Khi đó } BH = BC + CH = 150 + 45 = 195 \text{ (m)}$$

Xét tam giác AHB vuông tại H có hai cạnh góc vuông $AH \approx 77,9 \text{ (m)}$, $BH = 195 \text{ (m)}$

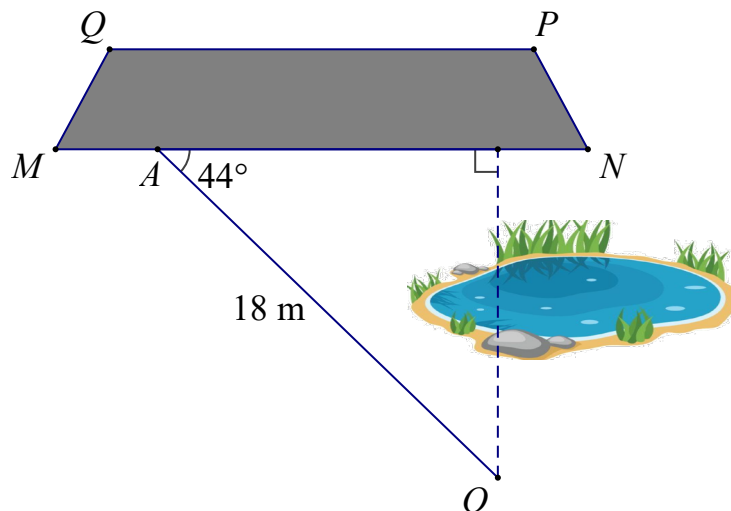
Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AH = BH \cdot \tan B \Rightarrow \tan B = \frac{AH}{BH} \approx \frac{77,9}{195} \approx 21^\circ 46'$$

$$\text{Lại có } AH = AB \cdot \sin B \Rightarrow AB = \frac{AH}{\sin B} \approx \frac{77,9}{\sin 21^\circ 46'} \approx 210 \text{ (m)}$$

Nhận xét: Tính AB ta có thể dùng định lý Pythagore với tam giác vuông khi đã biết hai cạnh góc vuông là $AH \approx 77,9 \text{ (m)}$, $BH = 195 \text{ (m)}$.

Bài toán 20. Trong công việc, người ta cần ước lượng khoảng cách từ vị trí O đến khu đất có dạng hình thang $MNPQ$ nhưng không thể đo được trực tiếp, khoảng cách đó được tính bằng khoảng cách từ O đến đường thẳng MN . Người ta chọn vị trí A ở đáy MN và đo được $OA = 18 \text{ m}$, $\widehat{OAN} = 44^\circ$ (hình vẽ bên). Tính khoảng cách từ vị trí O đến khu đất (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).



Lời giải

Gọi khoảng cách từ O đến vị trí khu đất là H .

Xét tam giác AOH vuông tại H có cạnh huyền $AO = 18 \text{ m}$, góc nhọn $\widehat{HAO} = 44^\circ$.

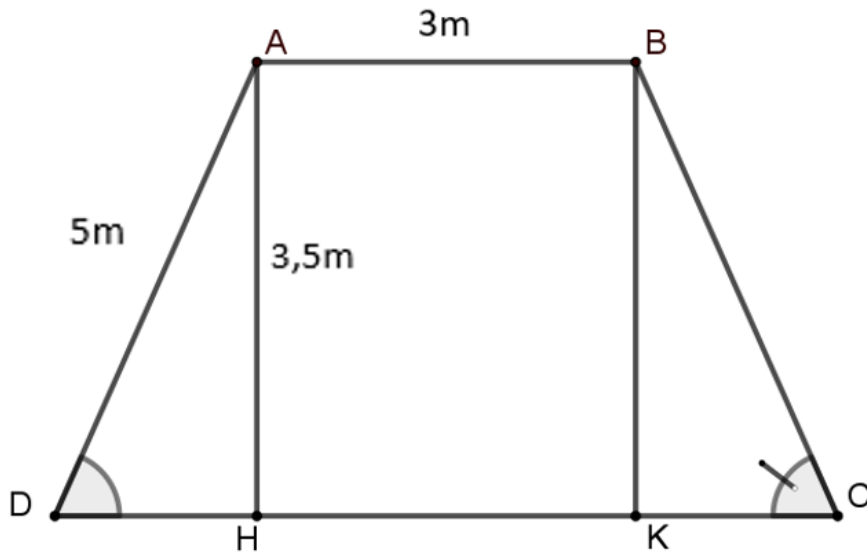
Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông,

$$\text{Ta có: } OH = OA \cdot \sin A$$

$$= 18 \cdot \sin 44^\circ \approx 12,5 \text{ (m)}.$$

Bài toán 21. Mặt cắt ngang của một đập ngăn nước có dạng hình thang $ABCD$ (hình vẽ bên). Chiều rộng của mặt trên AB của đập là 3 m . Độ dốc của sườn AD , tức là $\tan D = 1,25$. Độ dốc của sườn BC

, tức là $\tan C = 1,5$. Chiều cao của đập là $3,5\text{ m}$. Hãy tính chiều rộng CD của chân đập, chiều dài của các sườn AD và BC (làm tròn đến dm).



Lời giải

Gọi AH là chiều cao của đập $AH = 3,5\text{ m}$

Xét tam giác AHD vuông tại H có cạnh góc vuông có $AH = 3,5\text{ m}$ và độ dốc của sườn AD tức là $\tan D = 1,25$.

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AH = DH \cdot \tan D \Rightarrow DH = \frac{AH}{\tan D} = \frac{3,5}{1,25} = 2,8\text{ (m)}$$

Kẻ đường cao BK của hình thang $ABCD$ ta có tứ giác $ABKH$ là hình chữ nhật $\Rightarrow BK = AH = 3,5\text{ (m)}$ và $HK = AB = 3\text{ (m)}$.

Xét tam giác BKC vuông tại K có cạnh góc vuông $BK = 3,5\text{ m}$, $\tan C = 1,5$.

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$BK = KC \cdot \tan C \Rightarrow KC = \frac{BK}{\tan C} = \frac{3,5}{1,5} \approx 2,3\text{ (m)}$$

Do đó $CD = DH + HK + KC \approx 2,8 + 3 + 2,3 \approx 8,1\text{ (m)}$.

Ta có $\tan D = 1,25 \Rightarrow \widehat{D} = 51^\circ 20'$.

Xét tam giác AHD vuông tại H .

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AH = AD \cdot \sin D \Rightarrow AD = \frac{AH}{\sin D} = \frac{3,5}{\sin 51^\circ 20'} \approx 4,5\text{ (m)}$$

Tương tự $\tan C = 1,5 \Rightarrow \widehat{C} \approx 56^\circ 18'$

Tam giác BKC vuông tại K .

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$BK = BC \cdot \sin C \Rightarrow BC = \frac{BK}{\sin C} = \frac{3,5}{\sin 56^{\circ}18'} \approx 4,2 (m)$$

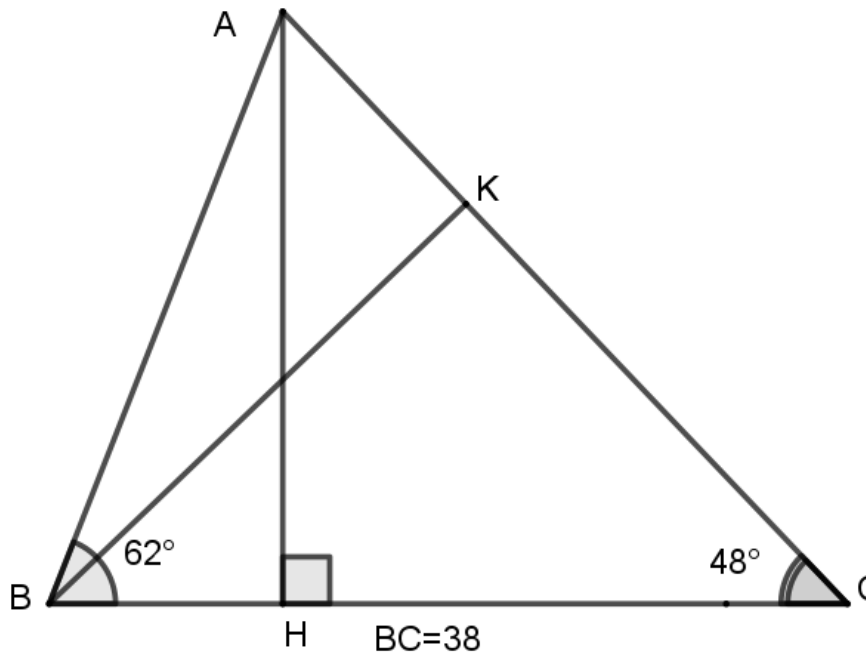
Vậy chiều rộng của chân đập khoảng $8,1 (m) = 81 dm$.

Chiều dài của sườn AD khoảng $4,5 (m) = 45 dm$.

Chiều dài của sườn BC khoảng $4,2 (m) = 42 dm$.

IV. Tính các yếu tố góc, cạnh và diện tích các hình

Bài toán 22. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 62^{\circ}$; $\widehat{C} = 48^{\circ}$; $BC = 38 cm$. Tính chiều cao AH của tam giác ABC .
(Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



Lời giải

Kẻ $BK \perp AC$. Xét tam giác vuông BKC vuông tại K có cạnh huyền $BC = 38 cm$, góc nhọn $\widehat{C} = 48^{\circ}$.

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$\text{Ta có } BK = BC \cdot \sin C = 38 \cdot \sin 48^{\circ} \approx 28,24 (m)$$

$$\text{Và } CK = BC \cdot \cos C = 38 \cdot \cos 48^{\circ} \approx 25,43 (m)$$

Xét tam giác vuông AKB có:

$$\begin{aligned} \widehat{A} &= 180^{\circ} - (\widehat{B} + \widehat{C}) \\ &= 180^{\circ} - (62^{\circ} + 48^{\circ}) = 70^{\circ} \end{aligned}$$

$$\text{Nên } AK = BK \cdot \cot A \approx 28,24 \cdot \cot 70^{\circ}$$

$$\approx 28,24 \cdot \tan 20^{\circ} \approx 10,28 (cm)$$

$$\text{Vậy } AC = AK + KC \approx 10,28 + 25,43 \approx 35,71 (cm)$$

$$\text{Ta có } AH \cdot BC = AC \cdot BK \text{ (hệ thức lượng)}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{AC.BK}{BC} \approx \frac{35,71.28,24}{38} \approx 26,54 \text{ (cm)}$$

Cách khác:

Đặt $AH = x$. Xét tam giác vuông AHB theo hệ thức lượng ta có:

$$HB = x.\cot B$$

tương tự với $\triangle AHC$: $HC = x.\cot C$

mà $BC = HB + HC$ hay $38 = x.\cot B + x.\cot C$

$$\Rightarrow 38 = x.(\cot 62^\circ + \cot 48^\circ)$$

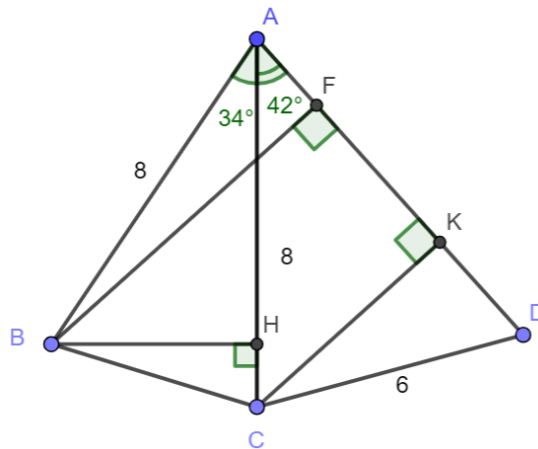
$$\Rightarrow 38 = x.(\tan 28^\circ + \tan 42^\circ)$$

$$\Rightarrow x = \frac{38}{\tan 28^\circ + \tan 42^\circ} \approx 26,54 \text{ (cm)}$$

Vậy $AH \approx 26,54 \text{ (cm)}$

Bài toán 23. Cho hình vẽ bên biết $AB = AC = 8\text{cm}$; $\widehat{BAC} = 34^\circ$; $\widehat{CAD} = 42^\circ$. Tính:

- Độ dài cạnh BC
- Số đo góc $\widehat{ADC}$
- Khoảng cách từ B đến cạnh AD .



Lời giải

a) Ta có $\triangle ABC$ cân tại A ($AB = AC = 8$) (gt)

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180^\circ - 34^\circ}{2} = 73^\circ.$$

Kẻ $BH \perp AC$ ta có $\triangle AHB$ vuông tại H , có cạnh huyền $AB = 8$, góc nhọn $\widehat{BAH} = 34^\circ$

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$BH = AB.\sin A = 8.\sin 34^\circ \approx 4,47 \text{ (cm)}$$

Xét tam giác vuông BHC , có cạnh góc vuông $BH = 4,47$, góc nhọn $\widehat{C} = 73^\circ$

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$BH = BC \cdot \sin C \Rightarrow BC = \frac{BH}{\sin C} = \frac{4,47}{\sin 73^\circ} \approx 4,68 \text{ (cm)}$$

b) Kẻ $CK \perp AD$ xét tam giác vuông AKC có $KC = AC \cdot \sin A = 8 \cdot \sin 42^\circ \approx 5,35 \text{ (cm)}$.

$$\text{Xét tam giác vuông } CKD \text{ ta có } \sin D = \frac{CK}{CD} = \frac{5,35}{6} \approx 0,89$$

$$\Rightarrow \widehat{D} \approx 63^\circ 7'$$

c) Kẻ $BF \perp AD$.

Xét tam giác vuông AFB có $AB = 8 \text{ (cm)}$;

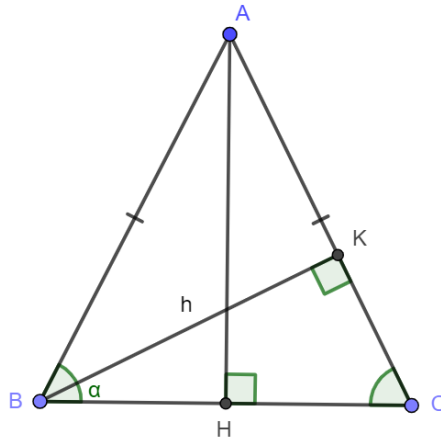
$$\widehat{BAF} = \widehat{BAC} + \widehat{CAF} = 34^\circ + 42^\circ = 76^\circ$$

$$\text{Ta có } BF = AB \cdot \sin 76^\circ = 8 \cdot \sin 76^\circ \approx 7,76 \text{ (cm)}.$$

Bài toán 24. Cho $\triangle ABC$ cân tại A, đường cao $BK = h$ và $\widehat{ABC} = \alpha$.

Tính các cạnh của tam giác theo h và α .

Lời giải



$$\triangle ABC \text{ cân tại A nên } \widehat{ACB} = \widehat{ABC} = \alpha$$

Lại có $\triangle BKC$ vuông tại K có $\widehat{C} = \alpha$, cạnh góc vuông $BK = h$, ta có:

$$BK = BC \cdot \sin \alpha$$

$$\Rightarrow BC = \frac{BK}{\sin \alpha} = \frac{h}{\sin \alpha}$$

Kẻ đường cao AH của tam giác ABC ta có AH cũng đồng thời là đường trung tuyến:

$$HB = HC = \frac{h}{2 \sin \alpha}$$

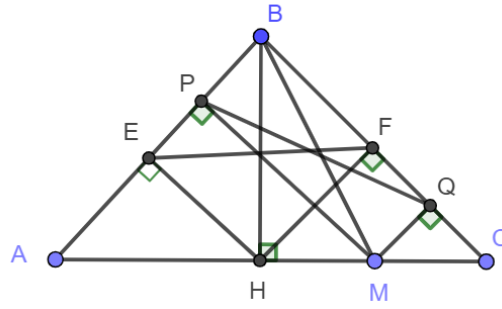
Bài toán 25. Cho $\triangle ABC$ có đường cao BH , biết $AB = 40\text{cm}$; $AC = 58\text{cm}$; $BC = 42\text{cm}$.

a) Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông.

b) Kẻ HE vuông góc với BC. Tính BH , BE , BF và diện tích của tứ giác $EFCA$.

c) Lấy M bất kì trên cạnh AC . Gọi hình chiếu của M trên AB và AC lần lượt là P và Q . Chứng minh $PQ = BM$. Từ đó suy ra vị trí M để PQ có độ dài nhỏ nhất (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải



a) Ta có $58^2 = 40^2 + 42^2$ ($AC^2 = AB^2 + BC^2$)

Theo định lý Pythagore đảo thì $\triangle ABC$ vuông tại B .

b) Ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AB = \frac{1}{2} BH \cdot AC$

$$\Rightarrow BH = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{40 \cdot 42}{58} \approx 28,97 \text{ (cm)}.$$

Xét $\triangle AHB$ và $\triangle BHE$ có:

$$\widehat{BHA} = \widehat{BEH} = 90^\circ \text{ (gt)}, \widehat{ABH} \text{ chung}$$

Do đó $\triangle AHB \sim \triangle BHE$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BH}{BE} = \frac{AB}{BH} \Rightarrow BH^2 = AB \cdot BE$$

$$\Rightarrow BE = \frac{BH^2}{AB} \approx \frac{(28,97)^2}{40} \approx 20,98 \text{ (cm)}.$$

Tương tự ta có $\triangle BFH \sim \triangle BHC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{BF}{BH} \Rightarrow BH^2 = BC \cdot BF \Rightarrow BF = \frac{BH^2}{BC} \approx \frac{(28,97)^2}{42} \approx 19,98 \text{ (cm)}.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} 40 \cdot 42 = 840 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{Và } S_{BEF} = \frac{1}{2} BE \cdot BF \approx \frac{1}{2} 20,98 \cdot 19,98 \approx 209,58 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{Do đó } S_{EFCA} = S_{ABC} - S_{BEF} = 840 - 209,58 \approx 630,42 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

c) Dễ thấy tứ giác $BQMP$ là hình chữ nhật (có ba góc vuông)

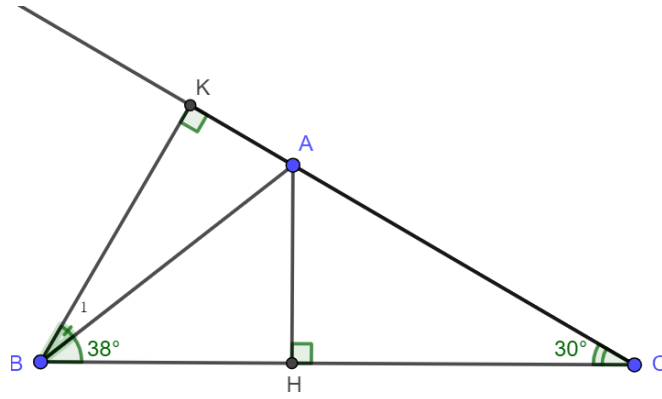
$$\Rightarrow PQ = BM$$

PQ nhỏ nhất $\Leftrightarrow BM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow BM$ là khoảng cách từ B đến AC .

$\Leftrightarrow M$ trùng với H (Là chân đường vuông góc kẻ từ B đến BC).

Bài toán 26. Cho $\triangle ABC$ có $BC = 11\text{cm}$, $\widehat{ABC} = 38^\circ$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BC . Hãy tính AH , AC .

Lời giải



Kẻ BK vuông góc với đường thẳng CA ta có $\triangle BKC$ vuông tại K , có cạnh huyền $BC = 11 \text{ cm}$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$BK = BC \cdot \sin C$$

$$= 11 \cdot \sin 30^\circ = 5,5 \text{ (cm)}.$$

$\triangle BKC$ vuông có $\widehat{C} = 30^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{KBC} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{KBA} = 60^\circ - 38^\circ = 22^\circ$$

Xét tam giác vuông BKA có

$$BK = AB \cdot \cos B_1$$

$$\Rightarrow AB = \frac{BK}{\cos 22^\circ} = \frac{5,5}{\cos 22^\circ} \approx 5,933 \text{ (cm)}.$$

Xét tam giác vuông AHB vuông tại H , có $\widehat{ABH} = 38^\circ$ và cạnh huyền $AB = 5,93 \text{ (cm)}$.

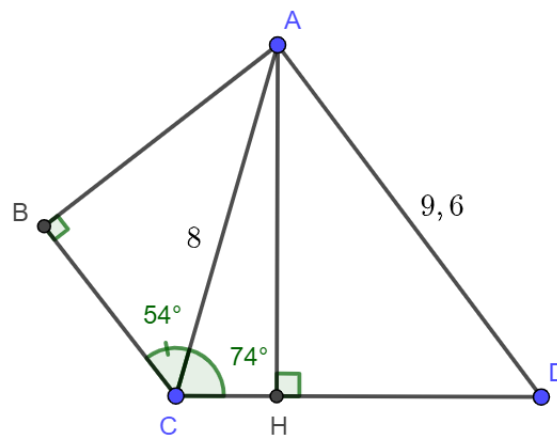
Ta có $AH = AB \cdot \sin B \approx 5,93 \cdot \sin 38^\circ \approx 3,65 \text{ (cm)}$

Xét tam giác vuông AHC có $\widehat{C} = 30^\circ \Rightarrow AC = 2AH \approx 2 \cdot 3,65 \approx 7,3 \text{ (cm)}$.

Bài toán 27. Cho hình vẽ bên biết $AC = 8 \text{ (cm)}$, $AD = 9,6 \text{ (cm)}$, $\widehat{ABC} = 90^\circ$, $\widehat{ACB} = 54^\circ$; $\widehat{ACD} = 74^\circ$

Tính AB và $\widehat{ADC}$ (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải



Ta có tam giác ABC vuông tại B (gt). Áp dụng hệ thức $b = a \cdot \sin C$ ta có

$$AB = AC \cdot \sin \widehat{ACB} = 8 \cdot \sin 54^\circ \approx 6,47 \text{ (cm)}.$$

Kẻ $AH \perp CD$. Xét tam giác vuông AHC ta có:

$$\begin{aligned} AH &= AC \cdot \sin \widehat{ACH} \\ &= 8 \cdot \sin 74^\circ \approx 7,69 (cm) \end{aligned}$$

Xét tam giác vuông AHD ta có

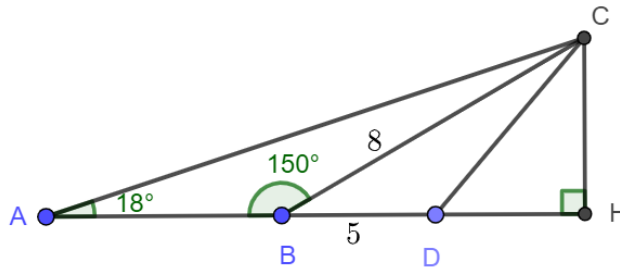
$$\sin \widehat{ADC} = \frac{AH}{AD} \approx \frac{7,69}{9,6} \approx 0,801$$

$$\Rightarrow \widehat{ADC} \approx 53^\circ$$

Bài toán 28. Cho hình vẽ bên biết: $\widehat{CAD} = 18^\circ$; $\widehat{ABC} = 150^\circ$, $BC = 8cm$, $BD = 5cm$. Hãy tính:

a) AB .

b) Diện tích tam giác ACD .



Lời giải

a) Kẻ CH vuông góc với đường thẳng AD . Xét tam giác vuông BHC .

Áp dụng hệ thức $b = a \cdot \sin B$ ta có: $CH = CB \cdot \sin \widehat{CBH} = 8 \cdot \sin 30^\circ = 4 (cm)$

$$(\widehat{CBH} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ)$$

$$\text{Lại có } CH = BH \cdot \tan 30^\circ \Rightarrow BH = \frac{CH}{\tan 30^\circ} = \frac{4}{\tan 30^\circ} \approx 6,93 (cm)$$

Xét tam giác vuông AHC có: $CH = AH \cdot \tan A$

$$\Rightarrow AH = \frac{CH}{\tan A} = \frac{4}{\tan 18^\circ} \approx 12,35$$

$$\Rightarrow AB = AH - BH \approx 12,35 - 6,93 \approx 5,41$$

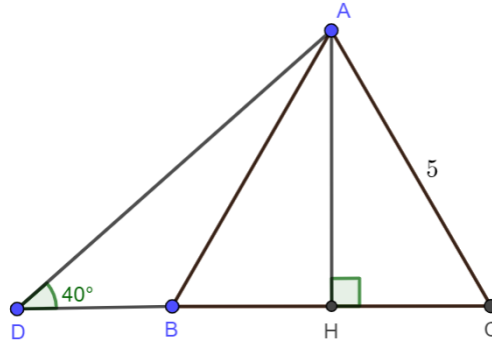
$$\text{b) } S_{ACD} = \frac{1}{2} CH \cdot AD$$

$$\text{Ta có } AD = AB + BD = 5,41 + 5 = 10,41 (cm)$$

$$\text{Vậy } S_{ACD} = \frac{1}{2} 4 \cdot 10,41 \approx 20,8 (cm^2).$$

Bài toán 29. Cho hình vẽ biết, $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh $5cm$, $\widehat{ADC} = 40^\circ$. Tính AD và BD

Lời giải



* Kẻ đường cao AH của tam giác đều ABC có cạnh là 5. Vậy $AH = \frac{5\sqrt{3}}{2}(cm)$.

Xét tam giác vuông AHD

Áp dụng hệ thức $b = a \cdot \sin D$ ta có: $AH = AD \cdot \sin 40^\circ$

$$\Delta ABC \Rightarrow AD = \frac{AH}{\sin 40^\circ} = \frac{5\sqrt{3}}{2} : \sin 40^\circ \approx 6,74(cm)$$

* đều nên đường cao AH cũng đồng thời là đường trung tuyến

$$\text{Hay } HB = HC = \frac{BC}{2} = \frac{5}{2} = 2,5(cm)$$

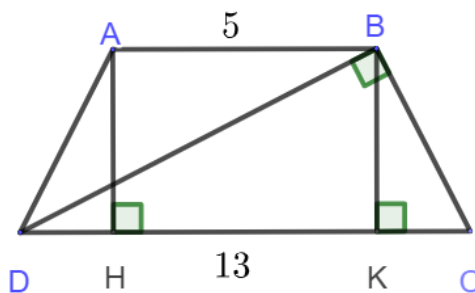
$$\text{Lại có: } DH = AH \cdot \cot D = \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \cot 40^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \tan 50^\circ \approx 5,16.$$

$$\text{Vậy } BD = DH - BH \approx 5,16 - 2,5 \approx 2,66(cm).$$

Bài toán 30. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) biết $AB = 5cm$, $CD = 13cm$ và $BD \perp BC$

- Tính độ dài đường cao BH của hình thang.
- Tính diện tích hình thang.
- Tính các góc của hình thang.

Lời giải



a) Kẻ $AK \perp CD$ ta có $\Delta AKD = \Delta BHC$ (ch.gn)

$$\Rightarrow DK = CH$$

Lại có $ABHK$ là hình bình hành có một góc vuông nên $ABHK$ là hình chữ nhật

$$\Rightarrow HK = AB = 5(cm).$$

$$\Rightarrow DK = CH = \frac{DC - HK}{2} = \frac{13 - 5}{2} = 4(cm)$$

$$\Rightarrow DH = DK + HK = 4 + 5 = 9(cm).$$

Xét $\triangle BHD$ và $\triangle BHC$ có:

$$\widehat{BHD} = \widehat{BHC} = 90^\circ, \widehat{DBH} = \widehat{C} \text{ (cùng phụ với } \widehat{BDH} \text{)}$$

$$\Rightarrow \triangle BHD \sim \triangle CHB (g.g) \Rightarrow \frac{BH}{HD} = \frac{CH}{BH}$$

$$\Rightarrow BH^2 = DH.CH = 9.4 = 36$$

$$\Rightarrow BH = \sqrt{36} = 6(cm).$$

b) Gọi S_{ABCD} là diện tích hình thang, ta có:

$$S_{ABCD} = \frac{(AB + CD).BH}{2} = \frac{(5 + 13).6}{2} = 54(cm^2)$$

$$c) \triangle BHC \text{ có } \tan C = \frac{BH}{CH} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow \widehat{C} \approx 56^\circ 19'$$

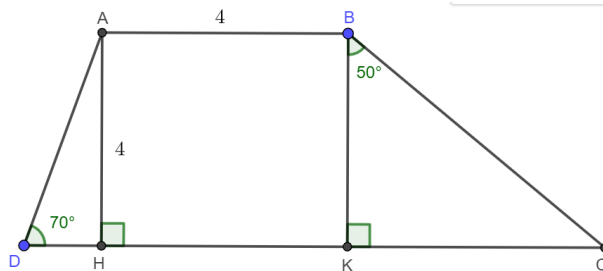
Vì $ABCD$ là hình thang cân (gt) $\Rightarrow \widehat{D} = \widehat{C} \approx 56^\circ 19'$

$$\text{Do đó } \widehat{DAB} = \widehat{CBA} = 180^\circ - 56^\circ 19' = 123^\circ 41'$$

Bài toán 31. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) (xem hình vẽ).

Biết $AB = 4cm$, $AH = 4cm$, $\widehat{D} = 70^\circ$, $\widehat{KBC} = 50^\circ$. Tính BC và CD

Lời giải



Dễ thấy $ABKH$ là hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau nên $ABKH$ là hình vuông.

Ta có $BK = AH = 4(cm)$

Xét $\triangle BKC$ vuông tại K , có cạnh góc vuông $BK = 4(cm)$, góc nhọn $\widehat{CBK} = 50^\circ$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$BK = BC.\cos B \Rightarrow BC = \frac{BK}{\cos B} = \frac{4}{\cos 50^\circ} \approx 6,22(cm)$$

$$\text{Và } KC = BK.\tan \widehat{KBC} = 4.\tan 50^\circ \approx 4,77(cm)$$

Xét $\triangle AHD$ vuông tại H , có cạnh góc vuông $AH = 4cm$, góc nhọn $\widehat{D} = 70^\circ$

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

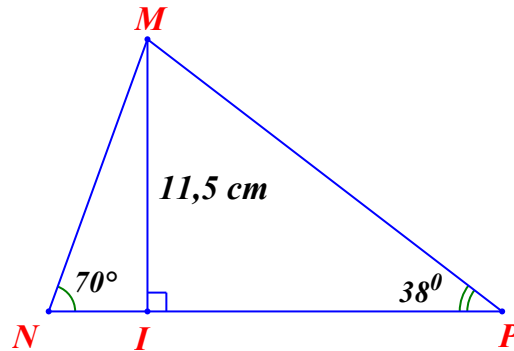
$$AH = DH.\tan 70^\circ \Rightarrow DH = \frac{AH}{\tan 70^\circ} = \frac{4}{\tan 70^\circ} \approx 1,46(cm)$$

$$\text{Vậy } DC = DH + HK + KC \approx 1,46 + 4 + 4,77 \approx 10,23(cm).$$

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

Bài toán 1. Cho tam giác MNP có $\widehat{N} = 70^\circ$, $\widehat{P} = 38^\circ$, đường cao MI = 11,5 cm, Tính độ dài của cạnh NP của tam giác MNP (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Lời giải



Xét tam giác MIN vuông tại I, có

Cạnh góc vuông MI = 11,5 cm và $\widehat{N} = 70^\circ$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$MI = NI \cdot \tan N \Rightarrow NI = \frac{MI}{\tan N} = \frac{11,5}{\tan 70^\circ} \approx 4,2(\text{cm})$$

$$\text{Tương tự với tam giác vuông MIP, ta có: } MI = PI \cdot \tan P \Rightarrow PI = \frac{MI}{\tan P} = \frac{11,5}{\tan 38^\circ} \approx 14,7(\text{cm})$$

$$\Rightarrow NP = NI + PI \approx 4,2 + 14,7 \approx 18,9(\text{cm})$$

Bài toán 2. Xét tam giác vuông có một góc nhọn bằng hai lần góc nhọn còn lại. Hỏi các tam giác đó có đồng dạng với nhau không? Tính sin và cos của góc nhọn lớn hơn.

Lời giải

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A. Ta có $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$ và giả sử $\widehat{B} = 2\widehat{C}$

$$\Rightarrow \widehat{B} = 60^\circ \text{ và } \widehat{C} = 30^\circ.$$

Xét $\triangle A'B'C'$ vuông tại A'. Ta có $\widehat{B'} + \widehat{C'} = 90^\circ$ và giả sử $\widehat{B'} = 2\widehat{C'}$

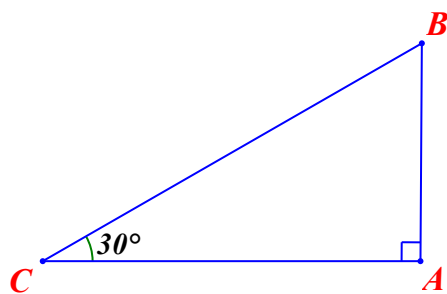
$$\Rightarrow \widehat{B'} = 60^\circ \text{ và } \widehat{C'} = 30^\circ.$$

Vậy $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ đồng dạng với nhau.

$$\text{Ta có } \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Bài toán 3. Một chiếc máy bay bay lên với tốc độ 50 km / h. Đường bay lên tạo với phương nằm ngang một góc 30° . Hỏi sau 3 phút kể từ lúc cất cánh, máy bay cách mặt đất bao nhiêu ki lô mét theo phương thẳng đứng?

Lời giải



(Xem hình vẽ bên).

Đổi: $3 \text{ phút} = \frac{1}{20} \text{ giờ}$.

Quãng đường bay lên CB gọi là S.

Ta có: $s = v.t = 450 \cdot \frac{1}{20} = 22,5 \text{ km}$.

Xét tam giác ABC vuông tại A có cạnh huyền $CB = 22,5$, góc nhọn $\hat{C} = 30^\circ$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

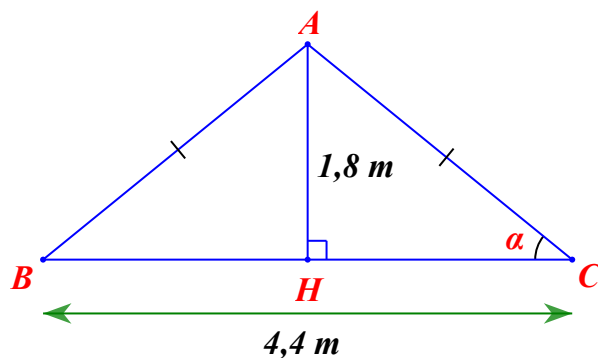
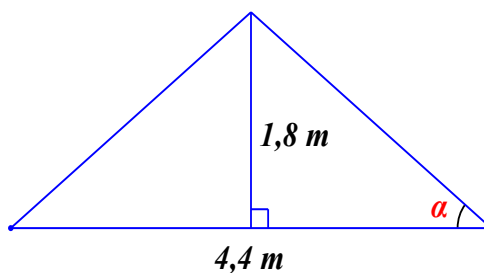
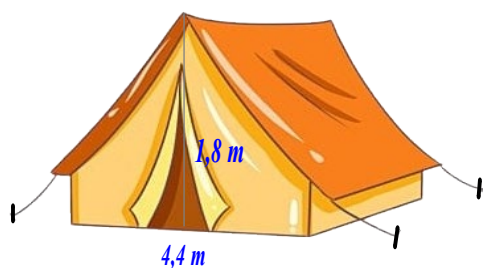
$$AB = BC \cdot \sin C = 22,5 \cdot \sin 30^\circ = 11,25 (\text{km})$$

Vậy sau 3 phút kể từ lúc cất cánh, máy bay cách mặt đất 11,25 km theo phương thẳng đứng.

Bài toán 4. Hình vẽ dưới đây là mô hình của một túp lều. Tìm góc α giữa cạnh mái lều và mặt đất (làm tròn kết quả đến phút).

Lời giải

(Xem hình vẽ bên).



Tam giác ABC cân tại A nên đường cao AH đồng thời cũng là đường trung tuyến
 $\Rightarrow HB = HC = 4,4 : 2 = 2,2(\text{m})$

Xét tam giác AHC vuông tại H có

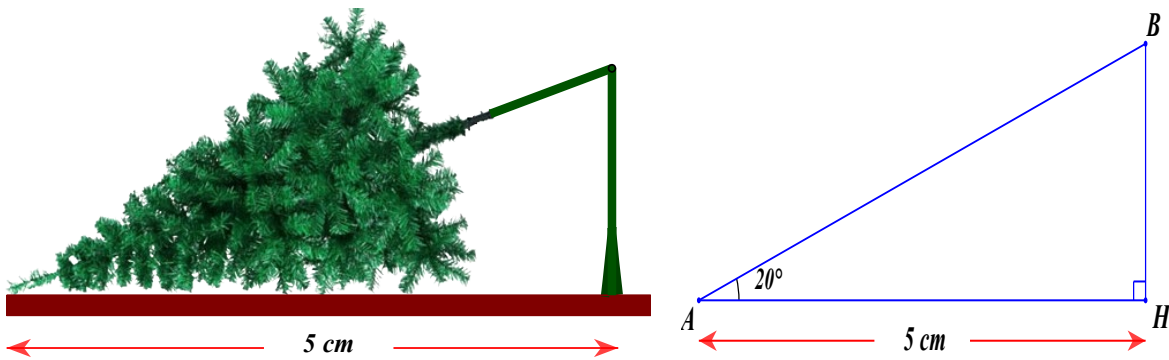
Cạnh hai góc vuông $HC = 2,2(\text{m})$ và $AH = 1,8(\text{m})$.

$$\text{Ta có: } \tan \alpha = \frac{AH}{HC} = \frac{1,8}{2,2} \Rightarrow \alpha \approx 39^\circ 17'$$

Vậy góc α giữa cạnh mái lều và mặt đất xấp xỉ $39^\circ 17'$.

Bài toán 4. Một cây cao bị gãy, ngọn cây đổ xuống mặt đất. Ba điểm: gốc cây, điểm gãy, ngọn cây tạo thành một tam giác vuông. Đoạn cây gãy tạo với mặt đất góc 20° và chẵn ngang lối đi một đoạn 5 m (hình vẽ). Hỏi trước khi bị gãy, cây cao khoảng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Lời giải



Lời giải

(Xem hình vẽ trên).

Trước khi bị gãy độ dài của cây là tổng của hai đoạn thẳng $HB + BA$. Xét tam giác AHB vuông tại H có cạnh góc vuông $AH = 5\text{m}$, $\hat{A} = 20^\circ$. Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$HB = AH \cdot \tan A = 5 \cdot \tan 20^\circ \approx 1,8(\text{m})$$

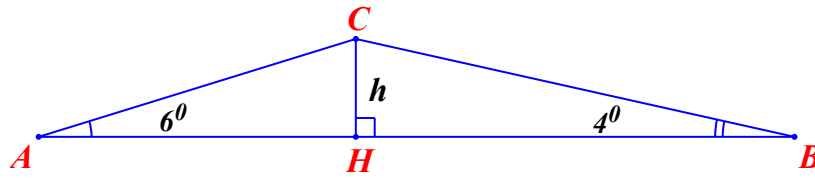
$$\text{Lại có } AH = AB \cdot \cos A \Rightarrow AB = \frac{AH}{\cos A} = \frac{5}{\cos 20^\circ} \approx 5,3(\text{m})$$

Vậy độ dài của cây trước khi bị gãy là: $1,8 + 5,3 \approx 7,1(\text{m})$.

Bài toán 6. Lúc 6 giờ sáng, bạn An đi xe đạp từ nhà (điểm A) đến trường (điểm B). Khi đi từ A đến B, An phải đi đoạn lên dốc AC và đoạn xuống dốc CB (hình vẽ). Biết $AB = 762\text{m}$, $\hat{A} = 6^\circ$, $\hat{B} = 4^\circ$.

a) Tính chiều cao h của con dốc.

b) Hỏi bạn An đến trường lúc mấy giờ? Biết rằng tốc độ khi lên dốc là 4 km/h và tốc độ khi xuống dốc là 19 km/h .



Lời giải

a) (Xem hình vẽ bên).

Xét tam giác AHC vuông tại H có cạnh góc vuông $CH = h$, góc nhọn $\widehat{A} = 6^\circ$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AH = h \cdot \cot A = h \cdot \cot 6^\circ$$

$$BH = h \cdot \cot B = h \cdot \cot 4^\circ.$$

$$\Rightarrow AB = AH + BH = h \cdot \cot 6^\circ + h \cdot \cot 4^\circ = h(\cot 6^\circ + \cot 4^\circ)$$

$$\Rightarrow h = \frac{AB}{\cot 6^\circ + \cot 4^\circ} = \frac{762}{\frac{1}{\tan 6^\circ} + \frac{1}{\tan 4^\circ}} \approx 32$$

Vậy chiều cao h của con dốc là 32(m).

b) Tam giác AHC vuông tại H có cạnh góc vuông $CH = 32\text{ m}$ và góc nhọn $\widehat{A} = 6^\circ$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$CH = AC \sin A \Rightarrow AC = \frac{CH}{\sin A} = \frac{32}{\sin 6^\circ} \approx 306(\text{m})$$

$$\text{Tương tự với } \triangle BHC \text{ ta có: } BC = \frac{CH}{\sin 4^\circ} = \frac{32}{\sin 4^\circ} \approx 459(\text{m})$$

Đổi: $306\text{ m} \approx 0,306(\text{km})$; $459\text{ m} \approx 0,459(\text{km})$

$$\text{Thời gian lên dốc là: } \frac{0,306}{4} \approx 0,077 \text{ (giờ)}$$

$$\text{Thời gian xuống dốc là: } \frac{0,459}{19} \approx 0,024 \text{ (giờ)}$$

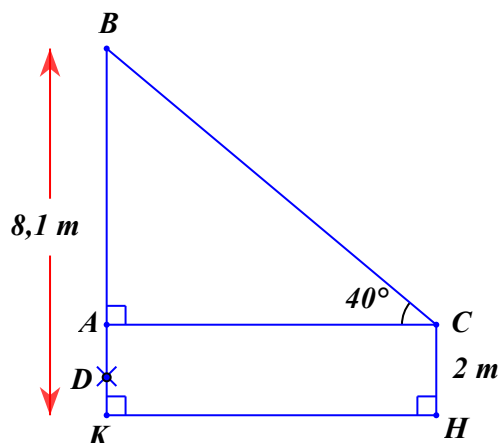
Thời gian lên và xuống dốc là: $0,077 + 0,024 \approx 0,101 \text{ (giờ)} \approx 6 \text{ (phút)}$

Bạn An xuất phát từ nhà lúc 6 giờ sáng, khi đến trường là 6h6 phút.

Bài toán 7. Một cần cẩu có góc nghiêng so với mặt đất nằm ngang là 40° . Vậy muốn nâng một vật nặng lên cao 8,1m thì cần cẩu phải dài bao nhiêu? Biết chiều cao của xe là 2,6m, chiều cao của vật nặng là 1m (xem hình vẽ) (kết quả làm tròn đến một chữ số thập phân).



Lời giải



(Xem hình vẽ).

Gọi DK là chiều cao của vật nặng.

Khi đó BD là độ cao cần nâng $BD = 8,1$ (m).

Dễ thấy tứ giác ACHK là hình chữ nhật

nên $AK = CH = 2,6$ (m)

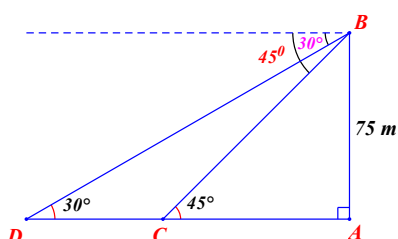
$$\Rightarrow AD = AK - DK = 2,6 - 1 = 1,6(\text{m})$$

$$\Rightarrow AB = BD - AD = 8,1 - 1,6 = 6,5(\text{m})$$

Bài toán 8. (Xem hình vẽ). Từ trên một ngọn hải đăng cao 75 m , người ta quan sát hai lần thấy một chiếc thuyền đang hướng về phía hải đăng với góc hạ lần lượt là 30° và 45° . Hỏi chiếc thuyền đi được bao nhiêu mét giữa hai lần quan sát.



Lời giải



(Xem hình vẽ).

Lần 1: Quan sát tại điểm D với góc hạ 30° .

Lần 2: Quan sát tại điểm C với góc hạ 45° .

Do đó chiều dài quãng đường chiếc thuyền đi được giữa hai lần quan sát là độ dài CD

Xét tam giác ABD vuông tại A có cạnh góc vuông $AB = 75\text{ m}$, góc nhọn $\widehat{D} = 30^\circ$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AB = AD \tan D \Rightarrow AD = \frac{AB}{\tan D} = \frac{75}{\tan 30^\circ} \approx 75\sqrt{3}(\text{m})$$

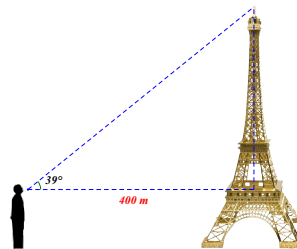
Tương tự với ABC ta có:

$$AC = \frac{AB}{\tan C} = \frac{75}{\tan 45^\circ} \approx 75(\text{m})$$

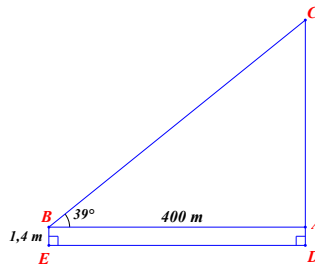
Vậy $CD = AD - AC$

$$= 75\sqrt{3} - 75 \approx 55(\text{m}).$$

Bài toán 9. Một người có mắt cách mặt đất $1,4\text{ m}$, đứng cách tháp Eiffel 400 m nhìn thấy đỉnh tháp với góc nâng 39° . Tính chiều cao của tháp (làm tròn kết quả đến mét).



Lời giải



(Xem hình vẽ).

Xét tam giác ABC vuông tại A có cạnh góc vuông $AB = 400\text{ m}$, góc nhọn $\widehat{B} = 39^\circ$

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có

$$AC = AB \tan B = 400 \cdot \tan 39^\circ \approx 324(\text{m})$$

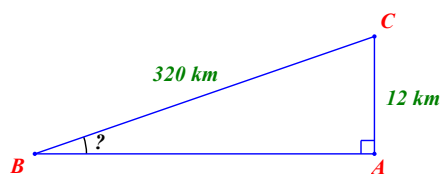
Chiều cao của tháp:

$$CD = AC + AD = 324 + 1,4 \approx 325(\text{m})$$

Bài toán 10. Một máy bay đang bay ở độ cao 12 km . Khi máy bay hạ cánh xuống mặt đất thì đường đi của máy bay tạo một góc nghiêng so với mặt đất. Nếu cách sân bay 320 km máy bay bắt đầu hạ cánh thì góc nghiêng là bao nhiêu (làm tròn đến phút).



Lời giải



(Xem hình vẽ).

Xét tam giác ABC vuông tại A có cạnh huyền $BC = 320\text{ km}$, cạnh góc vuông $AC = 12\text{ km}$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AC = BC \sin B \Rightarrow \sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{320} \Rightarrow \hat{B} = 2^\circ 9'$$

Nếu cách sân bay 320km máy bay bắt đầu hạ cánh thì góc nghiêng là $2^\circ 9'$.