

Chương I. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Bài 1. KHÁI NIỆM PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình bậc nhất hai ẩn

- Phương trình bậc nhất hai ẩn x và y là hệ thức dạng .

$$ax + by = c \quad (1)$$

trong đó a, b và c là các số đã biết $a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$

- Nếu tại $x = x_0$ và $y = y_0$, ta có $ax_0 + by_0 = c$ là một khẳng định đúng thì cặp số $(x_0; y_0)$ được gọi là một nghiệm của phương trình (1)

Nhận xét: Trong mặt phẳng toạ độ, tập hợp các điểm có toạ độ $(x; y)$ thoả mãn phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ là một đường thẳng.

2. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

- Một cặp gồm hai phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ và $a'x + b'y = c'$ được gọi là một hệ phương trình bậc nhất hai ẩn. Ta thường viết hệ phương trình đó dưới dạng:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

- Mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ được gọi là một nghiệm của hệ (1) nếu nó đồng thời là nghiệm của cả hai phương trình của hệ (1).

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Nghiệm của phương trình $ax + by = c$

Bài toán 1. Cho phương trình $x - y = 2$

a) Cặp số $(\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} - 1)$ có phải là nghiệm của phương trình hay không.

b) Tìm m để cặp số $(1, m + 2)$ $(1; m + 2)$ là một nghiệm của phương trình.

Hướng dẫn: Cặp số $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của phương trình $ax + by = c \Leftrightarrow$ đẳng thức $ax_0 + by_0 = c$ luôn đúng.

Lời giải

a) Thay $x = \sqrt{2} + 1; y = \sqrt{2} - 1$ vào phương trình $x - y = 2$, ta có:

$$(\sqrt{2} + 1) - (\sqrt{2} - 1) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1 = 2 \text{ (luôn đúng)}$$

Vậy cặp số $(\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} - 1)$ là một nghiệm của phương trình.

b) Thay $x = 1$ và $y = m + 2$ vào phương trình $x - y = 2$, ta được:

$$1 - (m + 2) = 2 \Leftrightarrow m = -3$$

Nhận xét: Cặp số $(1; 2)$ không là một nghiệm của phương trình đã cho vì: $1 - 2 = 2$ (không đúng).

Bài toán 2. Tìm m để cặp số $(1, 1)$ là một nghiệm của phương trình $(m-1)x + (m+1)y = 1$

Cặp số $\left(\frac{-1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ có phải là một nghiệm của phương trình hay không?

Lời giải

Thay $x = 1$ và $y = 1$ vào phương trình đã cho, ta được:

$$(m-1).1 + (m+1).1 = 1 \Leftrightarrow 2m = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

Thay $x = \frac{-1}{2}$ và $y = \frac{1}{2}$ vào phương trình đã cho, ta được:

$$\begin{aligned} \frac{-1}{2}(m-1) + \frac{1}{2}(m+1) &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{-1}{2}m + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2} &= 1 \text{ (luôn đúng với mọi } m\text{).} \end{aligned}$$

Vậy cặp số $\left(\frac{-1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là một nghiệm của phương trình.

Bài toán 3. Xác định một phương trình bậc nhất hai ẩn số, biết hai nghiệm là cặp số $(3; 5)$ và cặp số $(0, -2)$.

Hướng dẫn: Phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng $ax + by = c$. Thay các giá trị $x; y$ đã cho vào phương trình, ta tìm được a, b, c .

Lời giải

Phương trình bậc nhất hai ẩn đã có dạng $ax + by = c$.

• Nếu $a = 0; b \neq 0$, ta có: $by = c$

Thay $y = 5$ và (1) , ta được: $5b = c \Rightarrow \frac{c}{b} = 5$.

Thay $y = -2$ vào (1) , ta được: $-2b = c \Rightarrow \frac{c}{b} = -2$.

Vì $5 \neq -2$. Ta không xác định được phương trình.

• Nếu $a \neq 0; b = 0$. Ta có: $ax = c$.

Tương tự: $\frac{c}{a} = 3$ và $\frac{c}{a} = 0$ (không thỏa mãn).

- Nếu $a \neq 0; b \neq 0$, ta đưa về bài toán: Viết phương trình đường thẳng $(d): y = mx + n$ qua hai điểm $(3;5)$ và $(0;-2)$.

$$\text{Điểm } (0;-2) \in (d) \Rightarrow -2 = m.0 + n \Rightarrow n = -2.$$

$$\text{Khi đó } y = mx - 2. \text{ Lại có } (3;5) \in (d) \Rightarrow 5 = m.3 - 2 \Rightarrow m = \frac{7}{3}.$$

$$\text{Vậy } y = \frac{7}{3}x - 2 \Leftrightarrow 7x - 3y - 6 = 0.$$

Ta được một phương trình bậc nhất hai ẩn: $7x - 3y - 6 = 0$ nhận cặp số $(3;5)$ và $(0;-2)$ là nghiệm.

Bài toán 4. Cho hai phương trình $x + y = 2$ và $x - 2y = -1$. Tìm một cặp số $(x; y)$ là nghiệm chung của hai phương trình.

Hướng dẫn: Đưa về bài toán tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng.

Lời giải

Nghiệm chung $(x; y)$ của hai phương trình là tọa độ giao điểm (nếu có) của hai đường thẳng

$$x + y = 2 \text{ và } x - 2y = -1$$

Viết lại phương trình dưới dạng: $x = 2 - y$ và $x = 2y - 1$.

Phương trình tung độ giao điểm của hai đường thẳng

$$2 - y = 2y - 1 \Leftrightarrow y = 1$$

Từ đó, tìm được: $x = 1$

Vậy nghiệm chung của hai phương trình là cặp số $(1;1)$

Nhận xét: Có thể tìm x trước từ đó phương trình hoành độ giao điểm của hai đường thẳng được viết dưới dạng quen thuộc ở chương II

$$y = 2 - x \text{ và } y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

- Biểu thị x qua y , ta lập phương trình tung độ giao điểm.

Bài toán 5. Chứng tỏ rằng phương trình $3x - 2y = 1$ luôn nhận cặp số dạng $(2m+1; 3m+1)$ là nghiệm khi m thay đổi.

Lời giải

Thay $x = 2m+1$ và $y = 3m+1$ vào phương trình đã cho, ta được

$$3(2m+1) - 2(3m+1) = 1 \Leftrightarrow 6m + 3 - 6m - 2 = 1 \text{ (luôn đúng).}$$

Vậy cặp số $(2m+1; 3m+1)$ là nghiệm của phương trình.

Bài toán sau được giải tương tự:

- Chứng tỏ rằng cặp số $(4m+1; 3m)$ là nghiệm của phương trình:

$$3x - 4y = 3, \text{ khi } m \text{ thay đổi.}$$

- Tìm cặp số nguyên $(x; y)$ là nghiệm của phương trình $x - 2y = 4$.

Lời giải

Đặt $y = t; t \in \mathbb{Z}$, ta có: $x - 2t = 4 \Rightarrow x = 4 + 2t; t \in \mathbb{Z}$

Vậy cặp số $(4 + 2t; t); t \in \mathbb{Z}$ là nghiệm nguyên của phương trình $x - 2y = 4$.

Bài toán 6. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $2x - 3y = 1$.

Hướng dẫn: Có thể viết: $2x = 3y + 1$ là số chẵn khi $x \in \mathbb{Z}$, từ đó dẫn đến y là số lẻ.

$$\text{Đặt } y = 2t + 1, t \in \mathbb{Z}$$

Ta tìm được x

Lời giải

Cách 1. Ta có: $2x - 3y = 1 \Leftrightarrow 2x = 1 + 3y$.

Với $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2x$ là số chẵn $\Rightarrow y$ phải là số lẻ, ta đặt $y = 2t + 1; t \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Vậy } x = 3t + 2, t \in \mathbb{Z}.$$

Ta được cặp số $(x; y) = (2 + 3t; 1 + 2t)$ là nghiệm nguyên của phương trình.

$$\text{Cách 2. Ta có: } 2x - 3y = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3y+1}{2} \Leftrightarrow x = y + \frac{y+1}{2}$$

$$\text{Đặt } \frac{y+1}{2} = t \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = -1 + 2t; t \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vậy } x = -1 + 2t = t \Leftrightarrow x = -1 + 3t; t \in \mathbb{Z}.$$

Ta có cặp số $(x; y) = (-1 + 3t; -1 + 2t), t \in \mathbb{Z}$ là nghiệm nguyên của phương trình.

Bài toán tương tự:

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $4x + 3y = 2$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 4x + 3y = 2 \Leftrightarrow y = \frac{-4x+2}{3} \Leftrightarrow y = -x + \frac{2-x}{3}.$$

$$\text{Đặt } \frac{2-x}{3} = t; t \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2-x = 3t \Rightarrow x = 2-3t; t \in \mathbb{Z}.$$

Vậy $y = -(2 - 3t) + t \Rightarrow y = -2 + 4t$.

Ta có cặp số $(x; y) = (2 - 3t; -2 + 4t), t \in \mathbb{Z}$ là nghiệm nguyên của phương trình.

II. Biểu diễn tập nghiệm của phương trình $ax + by = c$.

Bài toán 7: Viết công thức nghiệm tổng quát và vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của phương trình $3x - y = 6$.

Hướng dẫn: Áp dụng công thức nghiệm tổng quát của phương trình $ax + by = c$ là:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{c - ax}{b} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ x = \frac{c - by}{a} \end{cases}$$

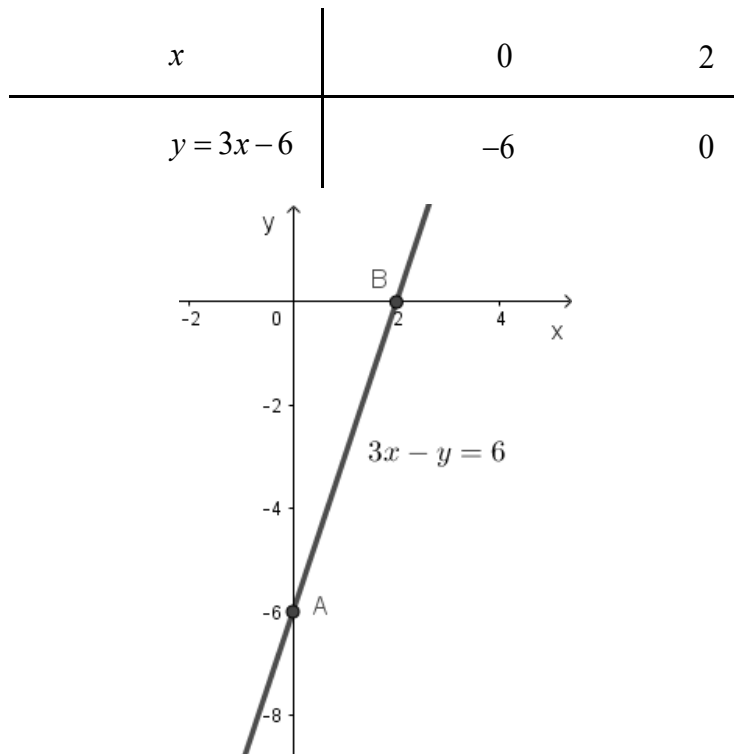
Lời giải

- Ta có: $3x - y = 6 \Leftrightarrow y = 3x - 6$

Vậy công thức nghiệm tổng quát là: $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 3x - 6 \end{cases}$

Vẽ đường thẳng $y = 3x - 6$.

- Bảng giá trị:



Đường thẳng $y = 3x - 6$ qua hai điểm $A(0; -6)$ và $B(2; 0)$ (xem hình vẽ).

Nhận xét: Công thức nghiệm tổng quát cũng có thể viết dưới dạng như sau:

Ta có: $3x - y = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6 + y}{3}$

Vậy công thức nghiệm tổng quát là:
$$\begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ x = \frac{6+y}{3} \end{cases}$$

Bài toán 8. Viết công thức nghiệm tổng quát và vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của phương trình $2x + 0y = 4$.

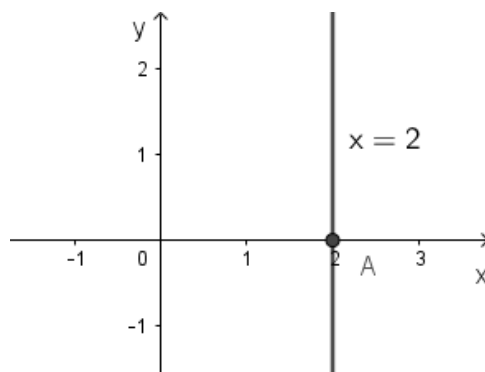
Hướng dẫn: Đường thẳng $x = 2$ qua điểm $(2; 0)$ và song song với Oy ,

Lời giải

Ta có $2x + 0y = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy công thức nghiệm tổng quát:
$$\begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ x = 2 \end{cases}$$

Đường thẳng $x = 2$ qua điểm $A(2; 0)$ và song song với Oy .



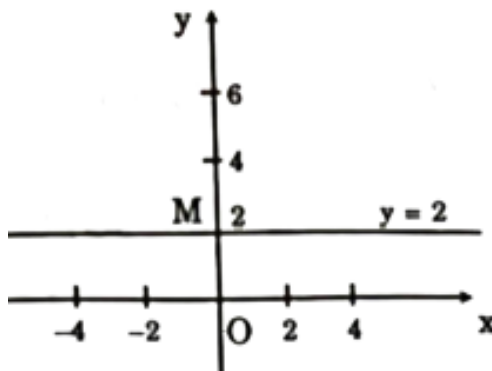
Bài toán tương tự:

Viết công thức nghiệm tổng quát và vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của phương trình $0x + 2y = 4$.

Lời giải

Ta có $0x + 2y = 4 \Leftrightarrow y = 2$.

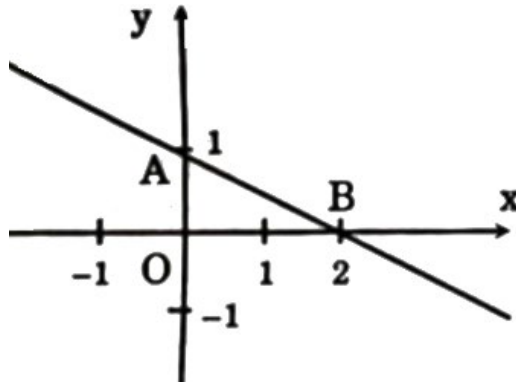
Công thức nghiệm tổng quát:
$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2 \end{cases}$$



Đường thẳng $y = 2$ qua điểm $M(0;2)$ và song song với Ox .

Bài toán 9. Cho đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn trên hình vẽ.

Hãy viết một phương trình bậc nhất hai ẩn.



Hướng dẫn: Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm $A(0;1)$ và $B(2;0)$.

Lời giải

Phương trình đường thẳng (d) qua A, B có dạng $y = ax + b$; Mà $A(0;1)$ và $B(2;0)$.

$$A \in (d) \Rightarrow 1 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 1$$

Vậy phương trình (d) lúc này có dạng: $y = ax + 1$.

$$\text{Lại có } B \in (d) \Rightarrow 0 = a \cdot 2 + 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy phương trình đường thẳng } (d): y = -\frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow x + 2y = 2.$$

Nhận xét: Ta có thể viết công thức nghiệm tổng quát như sau: $\begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ x = 2 - 2y \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -\frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$

Bài toán 10. Cho các phương trình $2x + y = 1$ và $2x - y = -5$.

Vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của mỗi phương trình rồi tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng đó.

Hướng dẫn: Lập phương trình hoành độ giao điểm của hai đường thẳng.

Lời giải

Ta viết lại:

$$2x + y = 1 \Leftrightarrow y = -2x + 1$$

$$2x - y = -5 \Leftrightarrow y = 2x + 5$$

Bảng giá trị:

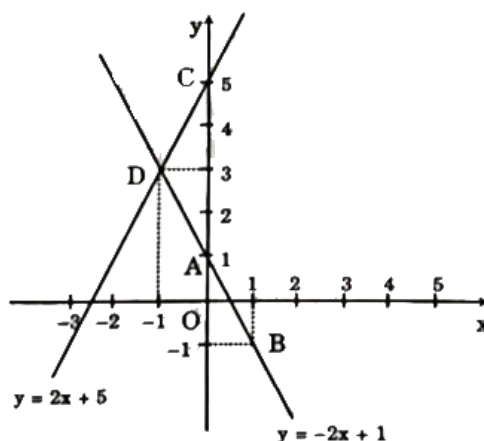
x	0
$y = -2x + 1$	1

Đường thẳng $(d): y = -2x + 1$ qua hai điểm $A(0;1)$ và $B(1;-1)$.

Bảng giá trị:

x	0	-1
$y = 2x + 5$	5	3

Đường thẳng $(d'): y = 2x + 5$ qua hai điểm $C(0;5)$ và $D(-1;3)$.



Phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của (d) và (d')

$$-2x + 1 = 2x + 5 \Leftrightarrow 4x = -4 \Leftrightarrow x = -1$$

Thay $x = -1$ vào phương trình $y = 2x + 5 \Rightarrow y = 2(-1) + 5 = 3$.

Vậy tọa độ giao điểm của (d) và (d') là điểm $M(-1;3)$.

Bài toán 11. Dùng hai cái can loại 5 lít và 2 lít. Làm thế nào để đong được 11 lít dầu hỏa từ một thùng dầu.

Hướng dẫn: Xét phương trình $5x + 2y = 11$.

Lời giải

Gọi $x, y \in \mathbb{Z}$ là số lần đong bằng can 5 lít và 2 lít:

Ta có phương trình $5x + 2y = 11$.

$$\Leftrightarrow 2y = 11 - 5x \Leftrightarrow y = 5 - 2x + \frac{1-x}{2}$$

$$y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{1-x}{2} \in \mathbb{Z} \text{ với } x \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Đặt } \frac{1-x}{2} = t \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 1 - 2t$$

Chẳng hạn, cho $t = 0 \Rightarrow x = 1$ và $y = 3$,

Ta có: $5.1 + 2.3 = 11$

Ta đóng đầy can 5 lít và 3 lần đóng đầy can 2 lít.

Cho $t = 1 \Rightarrow x = -1$ và $y = 8$, ta có: $5.(-1) + 2.8 = 11$

8 lần đóng đầy can 2 lít được 16 lít, lại đổ vào can 5 lít, còn lại 11 lít. (5 lít đổ trở lại thùng dầu).

Bài toán tương tự:

Dùng loại ống dẫn nước 4m và 6m để lắp đặt một đoạn đường ống dài 100m. Hỏi dùng bao nhiêu ống mỗi loại và không phải cắt đi một ống nào?

Hướng dẫn: Xét phương trình

$$4x + 6y = 100 \Leftrightarrow 2x + 3y = 50 \Leftrightarrow x = 25 - y - \frac{y}{2} \quad x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{N} \\ \frac{y}{2} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \frac{y}{2} = t, \text{ ta có: } \begin{cases} x = 25 - 3t \\ y = 2t; t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{Vì } x \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leq t \leq 8, t \in \mathbb{N}$$

$$\text{Chẳng hạn: } t = 5 \Rightarrow x = 10 \text{ và } y = 10.$$

Vậy lấy 10 ống mỗi loại.

Bài toán 12. Xác định hệ số góc và tung độ gốc của đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của phương trình $2x - 3y = 6$.

Hướng dẫn: Đưa về dạng $y = ax + b \Rightarrow a$ là hệ số góc và b là tung độ gốc.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2x - 3y = 6 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - 2$$

$$\text{Vậy hệ số góc của đường thẳng là } a = \frac{2}{3}; \text{ tung độ gốc là } b = -2.$$

$$\text{Bạn có thể vẽ đường thẳng } 2x - 3y = 6.$$

Bài toán 13. Tìm điểm cố định mà họ đường thẳng $(d): mx + y = m - 1$ luôn đi qua khi m thay đổi.

Lời giải

Gọi $(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà họ đường thẳng (d) luôn đi qua, khi m thay đổi.

$$\text{Ta có: } mx_0 + y_0 = m - 1; \forall m \Leftrightarrow (x_0 - 1)m + y_0 + 1 = 0; \forall m$$

$$\text{Phương trình bậc nhất của } m \text{ có vô số nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 1 = 0 \\ y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -1 \end{cases}$$

Vậy điểm cố định cần tìm là $(1; -1)$.

III. Nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

Bài toán 14. Tìm a, b để hệ phương trình $\begin{cases} ax - y = 5 \\ bx + ay = 4 \end{cases}$ có một nghiệm là $(x; y) = (2; -1)$.

Hướng dẫn: Thay $x = 2$ và $y = -1$ vào hệ và tìm a, b .

Lời giải

Vì $(x; y) = (2; -1)$ là một nghiệm của hệ, nên thay $x = 2$ và $y = -1$ vào hệ, ta được:

$$\begin{cases} 2a + 1 = 5 \\ 2b - a = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

Bạn có thể giải bài toán sau:

1. Tìm m, n để hệ phương trình: $\begin{cases} mx + 4y = 2 \\ mx + ny = 5 \end{cases}$ có một nghiệm $(x; y) = (2; -1)$

2. Tương tự với hệ: $\begin{cases} mx - y = 1 \\ x + y = n \end{cases}$ và nghiệm $(x; y) = (-1; 0)$.

Bài toán 15. Không cần vẽ hình, cho biết số nghiệm của mỗi hệ phương trình

$$\text{a) } \begin{cases} y = 3 - 2x \\ y = 3x - 1 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - \frac{1}{3}y = 1 \end{cases}; \quad \text{c) } \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2 = 0 \end{cases}; \quad \text{d) } \begin{cases} y = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

Lời giải

a) Đường thẳng $y = 3 - 2x$ có hệ số $a_1 = -2$.

Đường thẳng $y = 3x - 1$ có hệ số $a_2 = 3$.

$\Rightarrow a_1 \neq a_2$ nên 2 đường thẳng cắt nhau.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất.

b) Viết lại hệ: $\begin{cases} y = 3x - 3 \\ y = 3x - 3 \end{cases}$

Hai đường thẳng trùng nhau. Vậy hệ có vô số nghiệm.

c) Viết lại hệ: $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ x + 2 = 0 \end{cases}$

Đường thẳng $x + 2 = 0$ song song với trục tung, đường thẳng $y = 2x - 3$ có hệ số góc $a = 2$ nên hai đường thẳng cắt nhau.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất.

d) Viết lại hệ $\begin{cases} y = 2 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$

Đường thẳng $y = 2$ có hệ số $a_1 = 0$; đường thẳng $y = -2x + 1$ có hệ số $a_2 = -2 \neq 0$

$\Rightarrow$ hai đường thẳng cắt nhau.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất.

Bài toán 16. Tìm m để hệ sau vô nghiệm.

a) $\begin{cases} 4x - y = 3 \\ mx + 3y = 5 \end{cases};$

b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ mx + y = m - 2 \end{cases}$

Hướng dẫn: Viết các phương trình dưới dạng $y = ax + b$ và xét điều kiện để hai đường thẳng song song.

Lời giải

a) Hệ được viết lại: $\begin{cases} y = 4x - 3 \\ y = -\frac{m}{3}x + \frac{5}{3} \end{cases}$

Hai đường thẳng song song $\Leftrightarrow \begin{cases} 4 = -\frac{m}{3} \\ -3 \neq \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = -12.$

b) Hệ được viết lại: $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -mx + m - 2 \end{cases}$

Hai đường thẳng song song $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -m \\ -1 \neq m - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ -1 \neq -1 - 2 \text{ (đúng)} \end{cases}$

Vậy hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow m = -1.$

Bài toán 17. Tìm m để hệ sau có vô số nghiệm.

a) $\begin{cases} 4x - y = 3 \\ mx + y = -3 \end{cases};$

b) $\begin{cases} x + 2y = m \\ 3x + 6y = 12 \end{cases}$

Hướng dẫn: Hệ vô số nghiệm $\Leftrightarrow$ hai đường thẳng trùng nhau.

Lời giải

a) Hệ viết lại như sau: $\begin{cases} y = 4x - 3 \\ y = -mx - 3 \end{cases}$

Hệ vô số nghiệm khi và chỉ khi hai đường thẳng trùng nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} 4 = -m \\ -3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow m = -4$

b) Hệ viết lại như sau:
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{m}{2} \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$$

Hệ vô số nghiệm khi và chỉ khi hai đường thẳng trùng nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \\ \frac{m}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4$

Bài toán 18. Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất.

a) $\begin{cases} (2m-1)x + y = 5 \\ 3x - y = m \end{cases};$ b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ mx - y = m + 2 \end{cases}.$

Hướng dẫn: Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ hai đường thẳng cắt nhau.

Lời giải

a) Hệ viết lại như sau:
$$\begin{cases} y = (1-2m)x + 5 \\ y = 3x - m \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi hai đường thẳng cắt nhau $\Leftrightarrow 1-2m \neq 3 \Leftrightarrow m \neq -1$.

b) Hệ viết lại như sau:
$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = mx - m - 2 \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi hai đường thẳng cắt nhau $\Leftrightarrow -1 \neq m$ hay $m \neq -1$.

Bài toán 19. Cho phương trình $3x - 4y = 7$.

Hãy tìm một phương trình để cùng với một phương trình trên lập thành một hệ có nghiệm duy nhất, có vô số nghiệm, vô nghiệm.

Hướng dẫn: Viết phương trình cho về dạng $y = ax + b$.

Tìm phương trình đường thẳng cắt đường thẳng đã cho hoặc trùng với đường thẳng đã cho hoặc song song với đường thẳng đã cho.

Lời giải

Phương trình đã cho được viết lại dưới dạng: $y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$.

Đường thẳng $y = x + 1$ cắt đường thẳng đã cho; ta có hệ
$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4} \\ y = x + 1 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm duy nhất.

Tương tự hệ
$$\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 6x - 8y = 14 \end{cases}$$

Hệ có vô số nghiệm vì hai đường thẳng trùng nhau.

$$\text{Hệ} \begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 3x - 4y = 5 \end{cases}$$

Vô nghiệm vì hai đường thẳng song song.

IV. Minh họa hình học tập nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

Bài toán 20. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 5x - y = 11 \end{cases}$.

a) Minh họa hình học tập nghiệm của hệ phương trình trên.

b) Tìm nghiệm của hệ.

Hướng dẫn: Viết mỗi phương trình dưới dạng $y = ax + b$.

Vẽ các đường thẳng trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

Tìm tọa độ giao điểm (nếu có) của hai đường thẳng.

Lời giải:

a) Viết lại hệ dưới dạng: $\begin{cases} y = -3x + 5 \\ y = 5x - 11 \end{cases}$

Bảng giá trị:

x	0	2
$y = -3x + 5$	5	-1

Đường thẳng (d) :

$y = -3x + 5$ qua hai điểm $A(0; 5)$ và $B(2; -1)$.

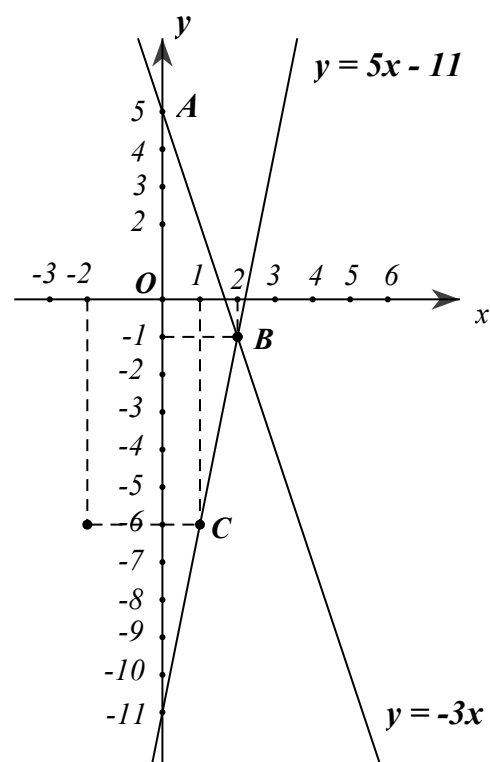
Bảng giá trị:

x	1	2
$y = 5x - 11$	-6	-1

Đường thẳng (d') : $y = 5x - 11$ qua hai điểm $C(1; -6)$ và $B(2; -1)$.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (d') .

$$-3x + 5 = 5x - 11 \Leftrightarrow 8x = 16 \Leftrightarrow x = 2$$



Thay $x = 2$ vào phương trình $y = -3x + 5$, ta được :

$$y = (-3) \cdot 2 + 5 \Rightarrow y = -1.$$

Vậy hệ có nghiệm: $(x; y) = (2; -1)$.

Chú ý: Có thể xác định nghiệm của hệ từ đồ thị đã vẽ. (Bạn hãy xem bài toán dưới đây)

Bài toán 21. Minh hoạ hình học tập nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 0y = 12 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 2y = 6 \\ 0x - 5y = 10 \end{cases}$$

Hướng dẫn: Viết phương trình dưới dạng $y = ax + b$ hoặc $y = b$ hoặc $x = c$.

Lời giải:

a) Viết lại hệ dưới dạng:

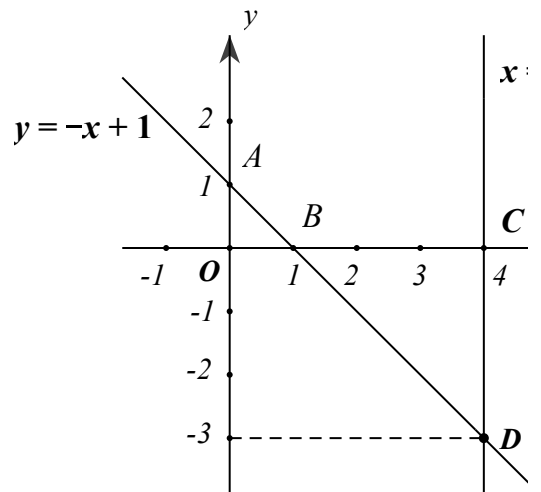
$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Bảng giá trị:

x	0	1
$y = -x + 1$	1	0

Đường thẳng $(d) : y = -x + 1$ qua hai điểm $A(0;1)$ và $B(1;0)$.

Đường thẳng $(d') : x = 4$ song song với trục tung và cắt trục hoành tại điểm $C(4;0)$.



Nhận xét: Ta có thể xét bài toán: "Dùng đồ thị xác định nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 0y = 12 \end{cases}$$

Từ đồ thị đã vẽ, ta thấy giao điểm của (d) và (d') là $D(4; -3)$ là duy nhất.

Thử lại : Thay $x = 4$ và $y = -3$, ta được:
$$\begin{cases} 4 + (-3) = 1 \\ 3 \cdot 4 + 0 \cdot (-3) = 12 \end{cases}$$

Các đẳng thức đều đúng.

Vậy $(x; y) = (4; -3)$ là nghiệm duy nhất.

Cách khác: Xét phương trình tung độ giao điểm của (d) và (d') :

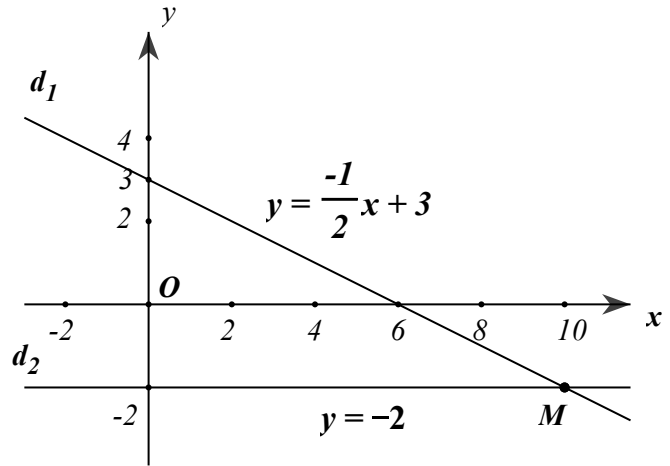
$$-y + 1 = 4 \Leftrightarrow y = -3$$

b) Viết lại hệ dưới

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{2} + 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

Minh họa hình học (xem hình vẽ)

Chú ý: Xác định nghiệm của hệ: Giao điểm của hai đường thẳng là $M(10; -2)$.



Thay $x = 10$ và $y = -2$ vào hệ ta được:

$$\begin{cases} 10 + 2 \cdot (-2) = 6 \\ 0 \cdot 10 - 5 \cdot (-2) = 10 \end{cases}$$

Các đẳng thức trên đều đúng.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $(x; y) = (10; -2)$.

Cách khác : Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2) :

$$-\frac{x}{2} + 3 = -2 \Leftrightarrow -x + 6 = -4 \Leftrightarrow x = 10$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $(x; y) = (10; -2)$.

Bài toán 22. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba đường thẳng $d_1 : 2x + y = 3$;

$d_3 : x - y = 0$; $d_3 : x + y = 2$. Chứng tỏ rằng ba đường thẳng đã cho đồng quy.

Hướng dẫn: Xét hệ $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$ và minh họa hình học tập nghiệm và tìm tọa độ giao điểm của

d_1 và d_2 . Chứng tỏ tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 thuộc d_3 .

Lời giải:

Xét hệ :
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

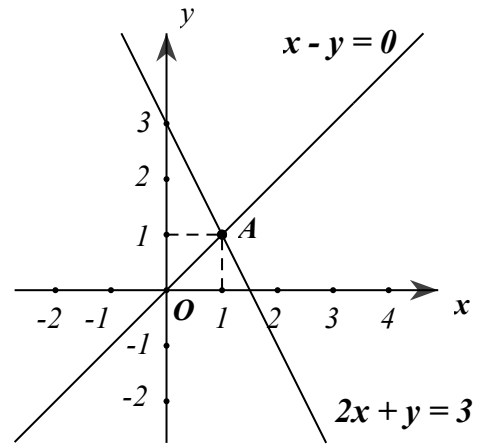
Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ hai đường thẳng $2x + y = 3$ và $x - y = 0$ (xem hình vẽ).

Hai đường thẳng cắt nhau tại điểm $A(1;1)$.

Thử lại: Thay $x=1$ và $y=1$ vào hệ, ta được

$$\text{đẳng thức đúng: } \begin{cases} 2.1 + 1 = 3 \\ 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (1; 1)$.



Lại có tọa độ $A(1;1)$ nghiệm đúng phương trình $d_3 : x + y = 2$ ($1 + 1 = 2$, luôn đúng).

Vậy ba đường thẳng đồng quy.

Bài toán 23. Tìm m để ba đường thẳng sau đây đồng quy: $d_1 : 2x - y = -1$;

$$d_2 : x + y = -2; d_3 : 2x + y = -m.$$

Hướng dẫn: Xem lời giải bài toán 22.

Lời giải:

Xét hệ :
$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + y = -2 \end{cases}$$

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ hai đường thẳng : $d_1 : 2x - y = -1$ và

$$d_2 : x + y = -2.$$

(xem hình vẽ).

Hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm $A(-1; -1)$.

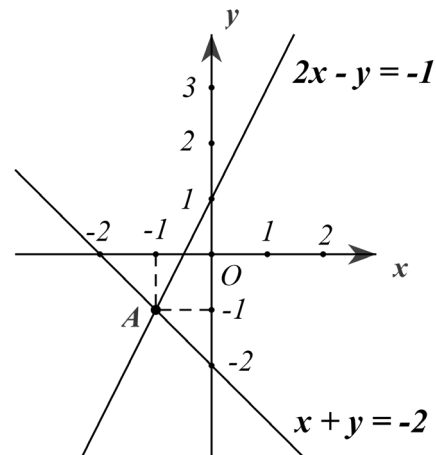
Thử lại: Thay tọa độ $A : x = -1$ và $y = -1$

ta được các đẳng thức đúng:

$$\begin{cases} 2.(-1) - (-1) = -1 \\ (-1) + (-1) = -2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ: $(x; y) = (-1; -1)$.

$$d_1, d_2, d_3 \text{ đồng quy} \Leftrightarrow A \in (d_3) \Leftrightarrow 2.(-1) + (-1) = -m \Leftrightarrow m = 3.$$



Bài 2. GIẢI HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN**PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ****1. Phương pháp thế:****Cách giải hệ phương trình bằng phương pháp thế****1. Phương pháp thế****Bước 1:** Từ một phương trình của hệ, biểu diễn một ẩn theo ẩn kia rồi thế vào phương trình còn lại của hệ để được phương trình chỉ còn chứa một ẩn.**Bước 2:** Giải phương trình một ẩn vừa nhận được, từ đó suy ra nghiệm của hệ phương trình đã cho.**2. Phương pháp cộng đại số****Cách giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số:**

Để giải một hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có hệ số của cùng một ẩn nào đó trong hai phương trình bằng nhau hoặc đối nhau, ta có thể làm như sau:

Bước 1: Cộng hoặc trừ từng vế của hai phương trình trong một hệ để được phương trình chỉ còn chứa một ẩn.**Bước 2:** Giải phương trình một ẩn vừa nhận được, từ đó suy ra nghiệm của hệ phương trình đã cho.**PHẦN B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP****I. Phương pháp thế****Bài toán 1.** Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} 2x + y = 5 & (1) \\ 3x - 2y = 11 & (2) \end{cases}$$
Lời giải:Từ phương trình (1), ta có: $y = 5 - 2x$ (3)Thay vào phương trình (2), ta được: $3x - 2(5 - 2x) = 11$ Giải phương trình (4): $3x - 2(5 - 2x) = 11$

$$3x - 10 + 4x = 11$$

$$7x = 21$$

$$x = 3$$

Thay giá trị $x = 3$ vào phương trình (3), ta có:

$$y = 5 - 2 \cdot 3 = -1.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (3; -1)$.**Bài toán tương tự**Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x - 3y = 2 \\ -2x + 5y = 1 \end{cases}$$
Bài toán 2. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} 3x + 12y = -5 & (1) \\ x + 4y = 3 & (2) \end{cases}$$
Lời giải:Từ phương trình (2), ta có: $x = 3 - 4y$ (3)Thay vào phương trình (1), ta được: $3(3 - 4y) + 12y = -5$ (4)Giải phương trình (4): $3(3 - 4y) + 12y = -5$

$$9 - 12y + 12y = -5$$

$$0y = -14$$

Do đó phương trình (4) vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Nhận xét: Ta có thể viết phương trình (1) về dạng: $x + 4y = -\frac{5}{3}$.

Khi đó, hệ có dạng:
$$\begin{cases} x + 4y = -\frac{5}{3} \\ x + 4y = 3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán tương tự:

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} -2x + 4y = 5 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

Đáp số: Hệ phương trình vô nghiệm.

Bài toán 3. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 12x - 4y = -16 & (1) \\ 3x - y = -4 & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Từ phương trình (2), ta có: $y = 3x + 4$ (3)

Thay vào phương trình (1), ta được: $12x - 4(3x + 4) = -16$ (4)

Giải phương trình (4): $12x - 4(3x + 4) = -16$

$$12x - 12x - 16 = -16$$

$$0x = 0.$$

Do đó phương trình (4) vô số nghiệm. Vậy hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm: $(x; 3x + 4)$ với x tùy ý, $x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét: Ta có thể viết phương trình (1) về dạng: $3x - y = -4$.

Do đó, hệ phương trình đã cho có thể viết về dạng:
$$\begin{cases} 3x - y = -4 \\ 3x - y = -4 \end{cases}$$

Vì vậy, nghiệm của hệ phương trình đã cho cũng là nghiệm của phương trình $3x - y = -4$.

Vậy hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm:
$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 3x + 4 \end{cases}$$

Bài toán tương tự:

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - 3y = 4 \\ -2x + 6y = -8 \end{cases}$$

Đáp số: Hệ có vô số nghiệm: $(3y + 4; y)$ với y tùy ý; $y \in \mathbb{R}$.

Ta có thể trình bày cách giải như các bài toán đây:

Bài toán 4. Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế.

a)
$$\begin{cases} 4x + y = 2 \\ 8x + 3y = 5 \end{cases}$$
 b)
$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases}$$
 c)
$$\begin{cases} \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 1 \\ x = -\sqrt{3}y + \sqrt{2} \end{cases}$$

Hướng dẫn: a) Từ phương trình $4x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - 4x$.

Thế y vào phương trình còn lại, ta tìm x .

b) Ta có $x - y = 2 \Rightarrow x = 2 + y$. Thế x vào phương trình thứ hai.

c) Thế x từ phương trình thứ hai vào phương trình đầu.

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \begin{cases} 4x + y = 2 \\ 8x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - 4x \\ 8x + 3(2 - 4x) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - 4x \\ -4x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = 1 \end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{1}{4}; 1\right)$.

$$\text{b) ta có } \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y \\ 3(2 + y) - 2y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (5; 3)$

$$\text{c) ta có } \begin{cases} \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 1 \\ x = -\sqrt{3}y + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}(-\sqrt{3}y + \sqrt{2}) - \sqrt{3}y = 1 \\ x = -\sqrt{3}y + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(1; \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{3}\right)$.

Bài toán 5: Tìm các hệ số $a; b$ biết rằng hệ phương trình:

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} ax + by = -5 \\ bx - ay = -5 \end{cases} & \text{ có nghiệm là } (1; -2) \\ \text{b) } \begin{cases} 2x + by = -4 \\ bx = ay = -5 \end{cases} & \text{ có nghiệm là } (1; -2). \end{aligned}$$

Hướng dẫn: Thế $x = 1$ và $y = -2$ vào hệ, ta được hệ phương trình bậc nhất hai ẩn là a và b .

Lời giải

a) Thế $x = 1$ và $y = -2$ vào hệ, ta được

$$\begin{cases} a - 2b = -5 \\ b + 2a = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - 5 \\ b + 2(2b - 5) = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - 5 \\ 5b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 2b - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \end{cases}$$

b) Thế $x = 1$ và $y = -2$ vào hệ, ta được

$$\begin{cases} 2 - 2b = -4 \\ -2b - a = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ (-2) \cdot 3 - a = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}.$$

Bài toán 6. Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm $A(2; 1)$ và $B(1; 2)$.

Hướng dẫn: Phương trình đường thẳng có dạng $y = ax + b$ ($a \neq 0$).

$$A \in d \Rightarrow 1 = 2a + b$$

$$B \in d \Rightarrow 2 = 1a + b$$

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} 2a + b = 1 \\ a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 1 \\ b = 2 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2 - a = 1 \\ b = 2 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}.$$

Vậy đường thẳng (d) đi qua A, B là $y = -x + 3$.

Bài toán tương tự :

Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm :

a) $P(-2; 5)$ và $Q(3; -4)$

b) $M(3; 4)$ và $N(-2; 5)$

Bài toán 7. Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất.

$$\begin{cases} x + my = 1 & (1) \\ mx - 3my = 2m + 3 & (2) \end{cases}$$

Hướng dẫn: Từ (1) $\Rightarrow x = 1 - my$. Thế x vào (2) và biện luận phương trình bậc nhất theo ẩn y .

Lời giải

Từ (1) $\Rightarrow x = 1 - my$. Thế x vào (2), ta được:

$$m(1 - my) - 3my = 2m + 3 \Leftrightarrow (m^2 + 3m)y = -m - 3 (*)$$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có nghiệm

$$\Leftrightarrow m^2 + 3m \neq 0 \Leftrightarrow m(m + 3) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0 \text{ và } m \neq -3$$

Nhận xét : 1) Ta có thể xét bài toán : Tìm m để hệ vô nghiệm.

Hệ vô nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 3m = 0 \\ m + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m + 3) = 0 \\ m + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Hệ có vô số nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có vô số nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 3m = 0 \\ m + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3.$$

2) Ta có thể giải cách khác bằng việc xét vị trí tương đối của hai đường thẳng cho bởi phương trình (1) và (2) (bạn hãy xem ở § 2. Hệ phương trình).

Tìm m để hệ sau có vô số nghiệm $\begin{cases} 3x - 2y = 6 & (1) \\ mx + y = -3 & (2) \end{cases}$

Lời giải

Từ (2) $\Rightarrow y = -mx - 3$. Thế y vào phương trình (1) ta được :

$$3x - 2(-mx - 3) = 6 \Leftrightarrow (2m + 3)x = 0 (*)$$

Hệ đã cho có vô số nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có vô số nghiệm

$$\Leftrightarrow 2m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}.$$

Nhận xét : a) Ta có thể đưa về xét điều kiện để hai đường thẳng cho bởi phương trình (1) và (2) trùng nhau.

b) Ta còn có bài toán : Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.

(Đáp số $m \neq -\frac{3}{2}$)

Bài toán 8. Tìm m để hệ sau vô nghiệm $\begin{cases} x + 2y = 3 & (1) \\ mx - 4y = -5 & (2) \end{cases}$.

Lời giải

Từ (1) $\Rightarrow x = 3 - 2y$. Thế x vào phương trình (2), ta được :

$$m(3 - 2y) - 4y = -5 \Leftrightarrow (2m + 4)y = 5 + 3m \quad (*)$$

Hệ đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) vô nghiệm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 4 = 0 \\ 3m + 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m \neq -\frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$$

Nhận xét : Bài toán tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow 2m + 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$.

Bài toán 9. Giải và biện luận hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = -1 & (1) \\ x + my = -2 & (2) \end{cases}$.

Hướng dẫn: Dùng phương pháp thế. Ta có $mx - y = -1 \Rightarrow y = mx + 1$. Thế vào phương trình (2).

Lời giải

Từ (1) $\Rightarrow y = mx + 1$. Thế y vào (2), ta có :

$$x + m(mx + 1) = -2 \Leftrightarrow (m^2 + 1)x = -m - 2 \quad (*)$$

Vì $m^2 + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$, ta được (*) $\Leftrightarrow x = \frac{-m - 2}{m^2 + 1}$.

$$\text{Từ đó tìm được } y = \frac{-2m + 1}{m^2 + 1}.$$

$$\text{Vậy hệ có nghiệm duy nhất } (x; y) = \left(\frac{-m - 2}{m^2 + 1}; \frac{-2m + 1}{m^2 + 1} \right).$$

Bài toán 10. Giải và biện luận hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 1 & (1) \\ x + my = 2 & (2) \end{cases}$.

Hướng dẫn: Dùng phương pháp thế.

Lời giải

Từ (1) $\Rightarrow y = 1 - mx$. Thế y vào (2), ta được :

$$x + m(1 - mx) = 2 \Leftrightarrow (1 - m^2)x = 2 - m \quad (*).$$

Trường hợp 1 : $1 - m^2 \neq 0 \Leftrightarrow (1 - m)(1 + m) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

$$\text{Ta có } (*) \Leftrightarrow x = \frac{2 - m}{1 - m^2}$$

$$\text{Từ đó tìm được } y = \frac{2m - 1}{m^2 - 1}.$$

$$\text{Hệ có nghiệm duy nhất } (x; y) = \left(\frac{2-m}{1-m^2}; \frac{2m-1}{m^2-1} \right)$$

$$\text{Trường hợp 2 : } 1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow (1-m)(1+m) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

$$+ \text{ Nếu } m = 1, \text{ ta có hệ } \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}. \text{ Hệ vô nghiệm (vì hai đường thẳng song song).}$$

$$+ \text{ Nếu } m = -1, \text{ ta có hệ } \begin{cases} -x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ x - y = 2 \end{cases}. \text{ Hệ này cũng vô nghiệm.}$$

Bài toán 11: Giải và biện luận hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 4 & (1) \\ mx - y = 2 & (2) \end{cases}$.

Hướng dẫn: Dùng phương pháp thế.

Lời giải

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow x = 4 - my. \text{ Thế } x \text{ vào (2), ta được:}$$

$$m(4 - my) - y = 2 \Leftrightarrow (m^2 + 1)y = 4m - 2 \quad (*).$$

$$\text{Vì } m^2 + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}. \text{ Vậy } (*) \text{ có nghiệm duy nhất } y = \frac{4m - 2}{m^2 + 1}.$$

$$\text{Từ đó tìm được } x = \frac{2m + 4}{m^2 + 1}.$$

$$\text{Vậy hệ có nghiệm duy nhất } (x; y) = \left(\frac{2m + 4}{m^2 + 1}; \frac{4m - 2}{m^2 + 1} \right).$$

Bài toán 12. Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất thỏa mãn điều kiện

$$x > 0 \text{ và } y > 0 : \begin{cases} mx + 4y = 6 & (1) \\ x + my = 3 & (2) \end{cases}.$$

Hướng dẫn: Dùng phương pháp thế để tìm $x; y$ qua m . Giải các bất phương trình $x > 0$ và $y > 0$.

Lời giải

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow x = 3 - my. \text{ Thế } x \text{ vào (1), ta được}$$

$$m(3 - my) + 4y = 6 \Leftrightarrow (4 - m^2)y = 6 - 3m \quad (*)$$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow 4 - m^2 \neq 0 \Leftrightarrow (2 - m)(2 + m) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2 \text{ và } m \neq -2.$$

$$\text{Khi đó, ta có } y = \frac{6 - 3m}{4 - m^2} = \frac{3(2 - m)}{(2 - m)(2 + m)} = \frac{3}{2 + m}$$

$$\text{Thế } y = \frac{3}{2 + m} \text{ vào phương trình } x = 3 - my, \text{ ta được } x = 3 - \frac{3m}{2 + m} = \frac{6}{2 + m}.$$

$$\text{Vậy } m \neq \pm 2, \text{ hệ có nghiệm duy nhất } \begin{cases} x = \frac{6}{m+2} \\ y = \frac{3}{m+2} \end{cases}.$$

$$\text{Xét điều kiện } x > 0; y > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2+m} > 0 \\ \frac{6}{m+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m+2 > 0 \Leftrightarrow m > -2.$$

Vậy $m > -2$ và $m \neq 2$.

Bài toán 13. Tìm tất cả các số nguyên m để hệ sau có nghiệm duy nhất với $x; y$ đều là số nguyên:

$$\begin{cases} mx + y = 1 & (1) \\ x + my = 2 & (2) \end{cases}.$$

Hướng dẫn: Dùng phương pháp thế và tìm $m \in \mathbb{Z}$ sao cho $x \in \mathbb{Z}$ và $y \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Từ (2) $\Rightarrow x = 2 - my$. Thế x vào phương trình (1), ta được:

$$m(2 - my) + y = 1 \Leftrightarrow (1 - m^2)y = 1 - 2m \quad (*).$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm duy nhất

$$1 - m^2 \neq 0 \Leftrightarrow (1 - m)(1 + m) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1 \text{ và } m \neq -1.$$

$$\text{Vậy } (*) \Leftrightarrow y = \frac{2m - 1}{m^2 - 1}.$$

$$\text{Thế } y \text{ vào phương trình } x = 2 - my, \text{ ta được } x = \frac{m - 2}{m^2 - 1}.$$

$$\text{Nếu } x \in \mathbb{Z}; y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x + y \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ta có } x + y = \frac{3(m - 1)}{m^2 - 1} = \frac{3}{m + 1}; x + y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m + 1 \text{ là ước của } 3.$$

$$(\text{với } m \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 = \pm 1 \\ m + 1 = \pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \pm 2 \\ m = -4 \end{cases}.$$

Thử lại:

$$+ m = 0 \Rightarrow (x; y) = (2; 4) \text{ (nhận)}$$

$$+ m = -2 \Rightarrow (x; y) = \left(\frac{-4}{3}; \frac{-5}{3}\right) \text{ (loại)}$$

$$+ m = 2 \Rightarrow (x; y) = (0; 1) \text{ (nhận)}$$

$$+ m = -4 \Rightarrow (x; y) = \left(\frac{-2}{5}; \frac{-3}{5}\right) \text{ (loại)}$$

Vậy $m = 0$ hoặc $m = 2$.

Bài toán 14. Giải hệ phương trình

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y-1} = 1 \\ \frac{2}{x-2} - \frac{3}{y-1} = 1 \end{cases}$$

Hướng dẫn: Đặt $X = \frac{1}{x}$; $Y = \frac{1}{y}$. Ta gọi là phương pháp đặt ẩn phụ.

Lời giải

a) Điều kiện: $x \neq 0$ và $y \neq 0$. Đặt $X = \frac{1}{x}$; $Y = \frac{1}{y}$ ($X \neq 0$; $Y \neq 0$).

Ta có hệ: $\begin{cases} X - Y = 1 \\ 3X + 4Y = 5 \end{cases}$

$$\begin{cases} X = 1 + Y \\ 3(1 + Y) + 4Y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y = \frac{2}{7} \\ X = 1 + Y \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \frac{9}{7} \\ Y = \frac{2}{7} \end{cases} \text{ . Ta tìm được } \begin{cases} x = \frac{7}{9} \\ y = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất: $(x; y) = \left(\frac{7}{9}; \frac{7}{2}\right)$.

b) Điều kiện: $x \neq 2$ và $y \neq 1$. Đặt $u = \frac{1}{x-2}$; $v = \frac{1}{y-1}$.

Ta có hệ: $\begin{cases} u + v = 1 \\ 2u - 3v = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} u = 1 - v \\ 2(1 - v) - 3v = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 1 - v \\ v = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \frac{4}{5} \\ v = \frac{1}{5} \end{cases} \text{ .}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \frac{1}{x-2} = \frac{4}{5} \\ \frac{1}{y-1} = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2=\frac{5}{4} \\ y-1=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{13}{4} \\ y=6 \text{ (tm)} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $(x; y) = \left(\frac{13}{4}; 6\right)$.

Bài toán 15. Giải hệ phương trình:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x^2 + 3y = 1 \\ 3x^2 - 2y = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - 3y^2 = 1 \end{cases}$$

Hướng dẫn: a) Dùng phương pháp đặt ẩn phụ: $u = x^2$.

b) Đặt $u = x^2; v = y^2$

Lời giải

a) Đặt $u = x^2; u > 0$; ta có hệ: $\begin{cases} 2u + 3y = 1 \\ 3u - 2y = 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = \frac{3u-2}{2} \\ 2u + 3y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{3u-2}{2} \\ 2u + 3 \cdot \frac{3u-2}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{3u-2}{2} \\ y = \frac{8}{13} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \frac{8}{13} \\ y = -\frac{1}{13} \end{cases}$$

Ta tìm được hai nghiệm của hệ: $(x; y) = \left(\pm\sqrt{\frac{8}{13}}; -\frac{1}{13}\right)$.

b) Đặt $u = x^2; v = y^2 (u \geq 0; v \geq 0)$. Ta có hệ:

$$\begin{cases} 3u + v = 5 \\ u - 3v = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 5 - 3u \\ u - 3v = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 5 - 3u \\ u - 3(5 - 3u) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 5 - 3u \\ 10u = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \frac{8}{5} \text{ (tm)} \\ v = \frac{1}{5} \text{ (tm)} \end{cases}$$

Ta được bốn nghiệm: $(x; y) = \left(\pm \sqrt{\frac{8}{5}}; \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$.

Chú ý Lấy các tổ hợp về dấu của $x; y$, ta có bốn nghiệm, không phải hai nghiệm. Để tránh nhầm lẫn, ta viết bốn nghiệm:

$$(x; y) = \left(-\sqrt{\frac{8}{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}} \right); \left(-\sqrt{\frac{8}{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}} \right); \left(\sqrt{\frac{8}{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}} \right); \left(\sqrt{\frac{8}{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

II. Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

Bài toán 16. Giải hệ phương trình:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ -5x + 2y = 3 \end{cases} \\ \text{b) } & \begin{cases} x - 2\sqrt{2}y = \sqrt{5} \\ \sqrt{2}x + y = 1 - \sqrt{10} \end{cases} \\ \text{c) } & \begin{cases} (1 + \sqrt{2})x + (1 - \sqrt{2})y = 5 \\ (1 + \sqrt{2})x + (1 + \sqrt{2})y = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Hướng dẫn: Dùng phương pháp cộng đại số. (xem phần A). Tìm BCNN của 2 và 5 (là hệ số của số hạng chứa x).

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } & \begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ -5x + 2y = 3 \end{cases} \\ & \begin{cases} 10x - 15y = 10 \\ -10x + 4y = 6 \end{cases} \\ & \begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ -11y = 16 \end{cases} \\ & \begin{cases} y = -\frac{16}{11} \\ 2x - 3y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{13}{11} \\ y = -\frac{16}{11} \end{cases}$$

Hệ có nghiệm: $(x; y) = \left(-\frac{13}{11}; -\frac{16}{11}\right)$.

Chú ý: Ta tìm BCNN của 2 và 5 là 10. Vậy phải nhân hai vế phương trình đầu tiên với 5 ; nhân hai vế phương trình thứ hai với 2 và cộng vế với vế hai phương trình vừa tìm được.

b) Ta có $\begin{cases} x - 2\sqrt{2}y = \sqrt{5} \\ \sqrt{2}x + y = 1 - \sqrt{10} \end{cases}$

$$\begin{cases} \sqrt{2}x - 4y = \sqrt{10} \\ \sqrt{2}x + y = 1 - \sqrt{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5y = 1 - 2\sqrt{10} \\ x = 2\sqrt{2}y + \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1 - 2\sqrt{10}}{5} \\ x = \frac{2\sqrt{2} - 3\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Hệ có nghiệm: $(x; y) = \left(\frac{2\sqrt{2} - 3\sqrt{5}}{5}; \frac{1 - 2\sqrt{10}}{5}\right)$

Chú ý: Ta đã nhân hai vế phương trình thứ nhất với $\sqrt{2}$.

c) Trừ vế cho vế hai phương trình, ta được:

$$2\sqrt{2}y = -2$$

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Thay $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ vào phương trình $(1 + \sqrt{2})x + (1 - \sqrt{2})y = 5$ ta được $x = \frac{7\sqrt{2} - 6}{2}$

Hệ có nghiệm: $(x; y) = \left(\frac{7\sqrt{2} - 6}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Bài toán 17. Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm.

a) $A(1; 2)$ và $B(2; 1)$.

b) $A(1; 3)$ và $B(3; 2)$.

Hướng dẫn: Phương trình đường thẳng có dạng $y = ax + b$ ($a \neq 0$).

Lời giải

a) Phương trình đường thẳng (d) có dạng $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

Vì $A \in (d)$ nên $2 = a + b$

Vì $B \in (d)$ nên $1 = 2a + b$

Ta có hệ phương trình bậc nhất hai ẩn a và b là
$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$$

Trừ vế cho vế hai phương trình, ta được: $-a = 1$ nên $a = -1$.

Thay $a = -1$ vào phương trình $a + b = 2$ hay $-1 + b = 2$ nên $b = 3$.

Phương trình đường thẳng (d) qua A, B là $y = -x + 3$.

b) Phương trình đường thẳng (d) có dạng $y = ax + b$ ($a \neq 0$).

Vì $A \in (d)$ nên $a + b = 3$

Vì $B \in (d)$ nên $3a + b = 2$

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 3a + b = 2 \end{cases}$$

Trừ vế cho vế hai phương trình, ta được: $-2a = 1$ nên $a = -\frac{1}{2}$.

Thế $a = -\frac{1}{2}$ vào phương trình $a + b = 3$, ta có:

$$-\frac{1}{2} + b = 3 \text{ nên } b = \frac{7}{2}$$

Phương trình đường thẳng (d) qua A, B là $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

Chú ý: Ta có thể viết theo cách biến đổi tương đương.

Bài toán 18. Tìm m để đường thẳng $y = mx + 2$ đi qua giao điểm của hai đường thẳng: $(d_1): 2x + 3y = 7$

và $(d_2): 3x + 2y = 13$

Hướng dẫn: Tìm tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) bằng cách lập hệ:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta được nghiệm $(x; y)$.

Từ đó tìm được m .

Lời giải

Tọa độ giao điểm (nếu có) của (d_1) và (d_2) thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 6y = 14 \\ 9x + 6y = 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x = 25 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$$

Tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là điểm $M(5; -1)$.

Đường thẳng $y = mx + 2$ qua $M(5; -1)$ nên $-1 = 5m + 2$ hay $m = -\frac{3}{5}$.

Chú ý: Ta có thể biểu diễn y qua x từ hai phương trình (d_1) và (d_2) và lập phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2) như đã làm ở chương 2.

Bài toán 19. Tìm m để ba đường thẳng đồng quy:

$$(d_1) \ 5x + 11y = 8, \ (d_2) \ 10x - 7y = 74, \ (d_3) \ 4mx + (2m - 1)y = m + 2.$$

Hướng dẫn: Tìm tọa độ giao điểm A của (d_1) và (d_2) .

Thay tọa độ A vào phương trình (d_3) .

Lời giải

Tọa độ giao điểm A (nếu có) của (d_1) và (d_2) thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} 5x + 11y = 8 \\ 10x - 7y = 74 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x + 22y = 16 \\ 10x - 7y = 74 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 29y = -58 \\ 5x + 11y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2 \\ 5x + 11y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy $A(6; -2)$.

$(d_1); (d_2); (d_3)$ đồng quy khi và chỉ khi (d_3) qua A .

Thay tọa độ $A(6; -2)$ vào phương trình (d_3) ; ta được:

$$(4m) \cdot 6 + (2m - 1) \cdot (-2) = m + 2 \text{ nên } m = 0$$

Bài toán 20. Tìm m để hệ có nghiệm $(x; y)$ duy nhất thỏa mãn điều kiện $x + y > 0$.

$$\begin{cases} mx + y = m \\ (m - 1)x - y = 2 \end{cases}$$

Hướng dẫn: Dùng phương pháp cộng đại số, tìm x, y .

Lời giải

Cộng vế với vế hai phương trình của hệ, ta được.

$$(2m - 1)x = m + 2 \quad (*)$$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm duy nhất nên $2m - 1 \neq 0$

$$\text{hay } m \neq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ta tìm được: } x = \frac{m+2}{2m-1}.$$

$$\text{Thế } x = \frac{m+2}{2m-1} \text{ vào phương trình } mx + y = m.$$

$$\frac{m(m+2)}{2m-1} + y = m$$

$$y = \frac{m^2 - 3m}{2m-1}$$

$$\text{Vậy } x + y = \frac{m^2 - 2m + 2}{2m-1} = \frac{(m-1)^2 + 1}{2m-1}$$

$$\text{Vì } x + y > 0 \text{ nên } \frac{(m-1)^2 + 1}{2m-1} > 0$$

$$2m-1 > 0 \text{ (Vì } (m-1)^2 + 1 > 0, \forall m).$$

$$m > \frac{1}{2}$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện } m \neq \frac{1}{2}, \text{ ta lấy } m > \frac{1}{2}.$$

$$\text{Nhận xét: hệ vô nghiệm khi phương trình (*) vô nghiệm nên } m = \frac{1}{2}.$$

Bài toán 21. Tìm m để hệ sau vô nghiệm $\begin{cases} mx + 3y = 1 \\ -2mx + y = 5 \end{cases}$.

Hướng dẫn: Dùng phương pháp cộng đại số đưa về phương trình ẩn x .

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} mx + 3y = 1 \\ -2mx + y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} mx + 3y = 1 \\ 6mx - 3y = -15 \end{cases}$$

$$\text{Cộng vế với vế hai phương trình, ta được: } 7mx = -14$$

$$mx = -2 \quad (*)$$

Hệ vô nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) vô nghiệm

$$\text{Nên } \begin{cases} m = 0 \\ -2 \neq 0 \end{cases} \text{ hay } m = 0$$

Nhận xét: Hệ có nghiệm duy nhất khi $m \neq 0$.

Bài toán 22. Giải và biện luận hệ phương trình sau: $\begin{cases} (m+5)x + 3y = 1 \\ mx + 2y = -4 \end{cases}$.

Hướng dẫn: Dùng phương pháp cộng đại số, đưa về phương trình một ẩn x .

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (m+5)x + 3y = 1 \\ mx + 2y = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2m+10)x + 6y = 2 \\ 3mx + 6y = -12 \end{cases}$$

Trừ vế cho vế hai phương trình, ta được: $(10-m)x = 14$

Trường hợp 1: $10-m \neq 0$ nên $m \neq 10$

$$\text{Ta có: (*) ta có } x = \frac{14}{10-m}$$

$$\text{Ta tìm được: } y = \frac{5m+20}{m-10}$$

$$\text{Hệ có nghiệm duy nhất: } (x; y) = \left(\frac{14}{10-m}; \frac{5m+20}{m-10} \right)$$

Trường hợp 2: $10-m = 0$ nên $m = 10$.

Phương trình (*) vô nghiệm khi hệ vô nghiệm.

$$\text{Đáp số: } m \neq 10. \text{ Hệ có nghiệm duy nhất: } (x; y) = \left(\frac{14}{10-m}; \frac{5m+20}{m-10} \right) \\ + m = 10 \text{ hệ vô nghiệm}$$

Bài toán 23. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 2m + 1 \\ 3x + 2y = 2m + 7 \end{cases}$.

a) Giải và biện luận hệ phương trình trên.

b) Tìm m để hệ có nghiệm thỏa mãn điều kiện $x + y > 0$.

Hướng dẫn: Dùng phương pháp cộng đại số đưa về phương trình ẩn x .

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \begin{cases} mx - y = 2m + 1 \\ 3x + 2y = 2m + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2mx - 2y = 4m + 2 \\ 3x + 2y = 2m + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+3)x = 6m+9 \\ mx - y = 2m+1 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Nếu } 2m+3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -\frac{3}{2}. \text{ Ta có (1) } \Leftrightarrow x = \frac{6m+9}{2m+3}.$$

$$\text{Thế } x \text{ vào (2), ta tìm được } y = \frac{2m^2+m-3}{2m+3} = \frac{(m-1)(2m+3)}{2m+3} = m-1$$

$$\bullet \text{ Nếu } 2m+3 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}. \text{ Khi đó (1) } \Leftrightarrow 0x = 0 \text{ (luôn đúng)}$$

$$(2) \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + 2. \text{ Hệ vô số nghiệm: } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -\frac{3}{2}x + 2 \end{cases}$$

b) Từ kết quả phần a, ta có:

$$\bullet \text{ Nếu } m \neq -\frac{3}{2}, \text{ ta có } x = 3; y = m-1.$$

$$\Rightarrow x + y = m + 2. \text{ Vậy } x + y > 0 \Leftrightarrow m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -2 \left(m \neq -\frac{3}{2} \right).$$

$$\bullet \quad \text{Nếu } m = -\frac{3}{2} \Rightarrow x + y = -\frac{x}{2} + 2.$$

$$x + y > 0 \Leftrightarrow \frac{-x}{2} + 2 > 0 \Leftrightarrow x < 4$$

Hệ có vô số nghiệm $(x; y)$; với $y = -\frac{x}{2} + 2$ và $x < 4$, ta có $x + y > 0$.

Đáp số: Hệ có nghiệm $(x; y)$ và $x + y > 0 \Leftrightarrow m > -2$.

Bài toán 24. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - 2y = 4 - m \\ 2x + y = 3m + 3 \end{cases}$$

a) Giải và biện luận hệ phương trình đã cho.

b) Tìm m để hệ có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn: Dùng phương pháp cộng đại số.

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } \begin{cases} x - 2y = 4 - m \\ 2x + y = 3m + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 4 - m \\ 4x + 2y = 6m + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 2 \\ y = m - 1 \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (m + 2; m - 1)$.

$$\text{b) Ta có: } x^2 + y^2 = (m + 2)^2 + (m - 1)^2 = 2m^2 + 2m + 5 = 2\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} \geq \frac{9}{2}$$

Vậy $x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{9}{2}$.

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow m - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Bài toán 25. Giải và biện luận hệ phương trình (theo tham số a).

$$\begin{cases} ax + ay = a^2 \\ x + ay = 2 \end{cases}$$

Hướng dẫn: Dùng phương pháp cộng đại số.

Lời giải

Trừ vế cho vế hai phương trình, ta được $(a - 1)x = a^2 - 2$ (*)

$$\text{Nếu } a - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1. \text{ Ta có: } (*) \Leftrightarrow x = \frac{a^2 - 2}{a - 1}.$$

$$\text{Thế } x \text{ vào phương trình } x + ay = 2, \text{ ta được: } \frac{a^2 - 2}{a - 1} + ay = 2 \Leftrightarrow ay = \frac{-a^2 + 2a}{a - 1} (**)$$

$$\bullet \quad \text{Nếu } a \neq 0, \text{ ta có: } (**) \Leftrightarrow y = \frac{2 - a}{a - 1}$$

$$\text{Vậy } a \neq 1 \text{ và } a \neq 0, \text{ hệ có nghiệm duy nhất: } (x; y) = \left(\frac{a^2 - 2}{a - 1}; \frac{2 - a}{a - 1} \right)$$

- Nếu $a = 0$. Hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ x + 0y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$

Hệ có vô số nghiệm: $\begin{cases} x = 2 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

- Nếu $a = 1$, hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$

Hệ vô nghiệm.

Đáp số: - Nếu $a \neq 0$ và $a \neq 1$. Hệ có nghiệm duy nhất

$$(x; y) = \left(\frac{a^2 - 2}{a - 1}; \frac{2 - a}{a - 1} \right)$$

- Nếu $a = 0$. Hệ có vô số nghiệm: $\begin{cases} x = 2 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

- Nếu $a = 1$. Hệ vô nghiệm.

Bài toán 26. Giải hệ phương trình:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{-3}{x-y} + \frac{2}{2x+y} = -2 \\ \frac{4}{x-y} - \frac{10}{2x+y} = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \sqrt{x+3} - 2\sqrt{y+1} = 2 \\ 2\sqrt{x+3} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases}$$

Hướng dẫn: a) Đặt ẩn phụ: $u = \frac{1}{x-y}; v = \frac{2}{2x+y}$

b) Đặt $X = \sqrt{x+3}; Y = \sqrt{y+1}$

Lời giải

a) Điều kiện $x - y \neq 0$ và $2x + y \neq 0$.

Đặt $u = \frac{1}{x-y}; v = \frac{2}{2x+y}$, ta có hệ: $\begin{cases} -3u + v = -2 \\ 4u - 5v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -15u + 5v = -10 \\ 4u - 5v = 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -11u = -8 \\ -3u + 2v = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{8}{11} \\ v = \frac{2}{11} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} \frac{1}{x-y} = \frac{8}{11} \\ \frac{2}{2x+y} = \frac{2}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 8y = 11 \\ 2x + y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 8y = 11 \\ -8x - 4y = -44 \end{cases}$$

b) Điều kiện $x + 3 \geq 0$ và $y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$ và $y \geq -1$.

Đặt $X = \sqrt{x+3}; Y = \sqrt{y+1}$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} X-2Y=2 \\ 2X+Y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X-2Y=2 \\ 4X+2Y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5X=10 \\ 2X+Y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=2 \\ Y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3}=2 \\ \sqrt{y+1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=4 \\ y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$$

Bài toán 27. Giải hệ phương trình:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{x}{x-1} + \frac{2y}{y+2} = 3 \\ \frac{2x}{x-1} - \frac{y}{y+2} = -4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{2x+7}{x+2} + \frac{2}{y-1} = 7 \\ -\frac{2}{x+2} + \frac{3y+2}{y-1} = 6 \end{cases}$$

Hướng dẫn: a) Đặt $u = \frac{x}{x-1}; v = \frac{y}{y+2}$

$$\text{b) } \frac{2x+7}{x+2} = \frac{2x+4+3}{x+2} = \frac{2(x+2)+3}{x+2} = 2 + \frac{3}{x+2}$$

$$\frac{3y+2}{y-1} = 3 + \frac{5}{y-1}. \text{ Đặt } X = \frac{1}{x+2}; Y = \frac{1}{y-1}$$

Lời giải

$$\text{a) Đặt } u = \frac{x}{x-1} (x \neq 1); v = \frac{y}{y+2} (y \neq -2)$$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u+2v=3 \\ 2u-v=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+2v=3 \\ 4u-2v=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5u=-5 \\ 2u-v=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-1 \\ v=2 \end{cases}$$

Trở lại hệ phương trình x, y :

$$\begin{cases} \frac{x}{x-1} = -1 \\ \frac{y}{y+2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x+1 \\ y = 2y+4; x \neq 1; y \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -4 \end{cases}$$

Hệ có nghiệm: $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; -4\right)$.

b) Hệ đã cho được viết lại dưới dạng:

$$\begin{cases} 2 + \frac{3}{x+2} + \frac{2}{y-1} = 7 \\ -\frac{2}{x+2} + 3 + \frac{5}{y-1} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{x+2} + \frac{2}{y-1} = 5 \\ -\frac{2}{x+2} + \frac{5}{y-1} = 3 \end{cases}$$

Đặt $X = \frac{1}{x+2} (x \neq -2); Y = \frac{1}{y-1} (y \neq 1)$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3X + 2Y = 5 \\ -2X + 5Y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6X + 4Y = 10 \\ -6X + 15Y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19Y = 19 \\ -2X + 5Y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = 1 \\ X = 1 \end{cases}$$

Trở lại hệ hai ẩn x, y :

$$\begin{cases} \frac{1}{x+2} = 1 \\ \frac{1}{y-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 1 \\ y-1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Hệ có nghiệm $(x; y) = (-1; 2)$

Bài toán 28. Giải và biện luận hệ phương trình $\begin{cases} m|x| - y = m \\ |x| + my = 1 \end{cases}$.

Hướng dẫn: Đặt $u = |x|; u \geq 0$.

Lời giải

Đặt $u = |x|; u \geq 0$. Ta có hệ phương trình $\begin{cases} mu - y = m \\ u + my = 1 \end{cases}$

$+m = 0$. Hệ có dạng: $\begin{cases} y = 0 \\ u = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}$.

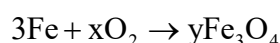
$+m \neq 0$. Ta có: $\begin{cases} mu - y = m \\ u + my = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2u - my = m^2 \\ u + my = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 + 1)u = m^2 + 1 \\ mu - y = m \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}$

Đáp số: Hệ có nghiệm $(x; y) = (1; 0); (-1; 0), \forall m$.

Nhận xét: Ta có thể giải hệ trên bằng phương pháp thế.

Bài toán 29. Tìm các hệ số x, y trong phản ứng hoá học đã được cân bằng sau:



Lời giải

Vì số nguyên tử của Fe và O ở cả hai vế của phương trình phản ứng phải bằng nhau nên có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3 = 3y \\ 2x = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

BÀI 3. GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Các bước giải một bài toán bằng cách lập hệ phương trình:

Bước 1: Lập hệ phương trình:

- Chọn ẩn số (thường chọn hai ẩn số) và đặt điều kiện thích hợp cho các ẩn số.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.
- Lập hệ phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2: Giải hệ phương trình.

Bước 3: Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm tìm được của hệ phương trình, nghiệm nào thoả mãn, nghiệm nào không thoả mãn điều kiện của ẩn, rồi kết luận.

PHẦN B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Bài toán về chu vi, diện tích các hình

Bài toán 1. Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi 34 m, nếu tăng chiều dài thêm 3 m và tăng chiều rộng thêm 2 m thì diện tích tăng thêm 45 m^2 . Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn.

Hướng dẫn: Hình chữ nhật có nửa chu vi bằng tổng chiều dài và chiều rộng; diện tích bằng tích chiều dài và chiều rộng. Đặt hai ẩn x và y là độ dài chiều dài và chiều rộng. Điều kiện $x > y > 0$.

Lời giải

Gọi x và y lần lượt là chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn.

Điều kiện: $x > y > 0$; x, y tính bằng mét.

Nửa chu vi hình chữ nhật bằng $x + y$. Theo đề ra, chu vi lúc ban đầu là 34 m, nên ta có phương

$$\text{trình } x + y = \frac{34}{2} \Leftrightarrow x + y = 17.$$

Diện tích lúc đầu là $xy (\text{m}^2)$.

Vì tăng chiều dài thêm 3 m, tăng chiều rộng thêm 2 m ta có diện tích lúc này sẽ là

$$(x + 3) \cdot (y + 2) (\text{m}^2).$$

Theo giả thiết, ta có phương trình: $(x + 3)(y + 2) = xy + 45$

Theo bài ra, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ (x + 3)(y + 2) = xy + 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 17 \\ 2x + 2y = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 34 \\ 2x + 3y = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x + y = 17 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 12 \end{cases}$$

(thoả mãn điều kiện $x > y > 0$)

Trả lời: Chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn là 12 (m) và 5 (m).

Bài toán 2. Một hình chữ nhật có chu vi 140 m. Ba lần chiều rộng lớn hơn chiều dài là 10 m. Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật.

Hướng dẫn: Đặt x, y là chiều dài và chiều rộng ($x > y > 0$).

Lập hệ hai ẩn biểu thị mối liên hệ giữa chiều dài, chiều rộng và chu vi.

Lời giải

Gọi x, y là chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật ($x > y > 0$, x, y tính bằng m).

Chu vi là 140 m, nên ta có phương trình: $2(x + y) = 140 \Leftrightarrow x + y = 70$

Ba lần chiều rộng lớn hơn chiều dài là 10 m, nên ta có phương trình: $3y - x = 10$

Vậy, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ 3y - x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = 80 \\ x + y = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 20 \\ x = 50 \end{cases} \text{ (TMĐK)}$$

Trả lời: Chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật là 50 (m) và 20 (m).

Bài toán 3. Nếu tăng gấp đôi chiều dài và giảm chiều rộng đi một nửa thì chu vi một hình chữ nhật sẽ tăng thêm 180 m. Nếu tăng gấp đôi chiều rộng và giảm chiều dài đi một nửa thì chu vi một hình chữ nhật tăng 120 m. Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật.

Lời giải

Gọi x, y là chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật ($x > y > 0$, x, y tính bằng m).

Chu vi hình chữ nhật là $2(x + y)$.

Nếu tăng chiều dài gấp đôi ta được $2x$ (m); giảm chiều rộng đi một nửa, ta được $\frac{y}{2}$ (m).

Chu vi hình chữ nhật lúc này là $2\left(2x + \frac{y}{2}\right)$.

Ta có phương trình $2\left(2x + \frac{y}{2}\right) - 2(x + y) = 180$

Nếu tăng gấp đôi chiều rộng và giảm chiều dài đi một nửa, tương tự ta có phương trình

$$2\left(2y + \frac{x}{2}\right) - 2(x + y) = 120$$

$$\text{Vậy, ta có hệ: } \begin{cases} 2\left(2x + \frac{y}{2}\right) - 2(x + y) = 180 \\ 2\left(2y + \frac{x}{2}\right) - 2(x + y) = 120 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 180 \\ -x + 2y = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 360 \\ -x + 2y = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 480 \\ 2x - y = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 160 \\ y = 140 \end{cases} \text{ (TMĐK)}$$

Trả lời: Chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật là 160 (m) và 140 (m).

II. Tìm chữ số của số tự nhiên

Bài toán 4. Tìm một số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng tổng của hai chữ số ấy bằng 12 và khi thay đổi thứ tự hai chữ số thì được một số lớn hơn số cũ là 18.

Hướng dẫn: Một số có hai chữ số có dạng $\overline{xy} = 10x + y$, $0 < x \leq 9, x \in \mathbb{N}$; $0 \leq y \leq 9, y \in \mathbb{N}$.

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là chữ số hàng chục và hàng đơn vị của số đã cho ($0 < x, y < 9$; $x, y \in \mathbb{N}$).

Số đã cho có dạng $\overline{xy} = 10x + y$, hai chữ số viết theo thứ tự ngược lại có dạng $\overline{yx} = 10y + x$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ (10y + x) - (10x + y) = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 12 \\ y - x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 7 \end{cases} \text{ (TMĐK)}$$

Trả lời: Số đã cho là 57.

Bài toán 5. Tìm một số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng tổng của hai chữ số ấy bằng 12 và chữ số hàng chục gấp đôi chữ số hàng đơn vị.

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là chữ số hàng chục và hàng đơn vị của số tự nhiên ($0 < x < 9; 0 < y \leq 9; x, y \in \mathbb{N}$).

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 12 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 12 \\ x + y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 8 \end{cases} \text{ (TMĐK)}$$

Vậy số cần tìm là 84.

Bài toán 6. Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 7. Nếu chia số đó cho số tạo thành bằng cách viết theo thứ tự ngược lại, ta được thương là 3 và số dư là 5.

Hướng dẫn: Số tự nhiên có hai chữ số có dạng $\overline{xy} = 10x + y$, $0 < x \leq 9, x \in \mathbb{N}$; $0 \leq y \leq 9, y \in \mathbb{N}$.

Chia số a cho b được thương là q và dư r , ta có $a = bq + r$ ($0 \leq r < b$).

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là chữ số hàng chục, hàng đơn vị của số đã cho ($0 < x, y \leq 9; x > y; x, y \in \mathbb{N}$).

Chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 7, ta có phương trình: $x = y + 7$.

Lấy số đó cho số tạo thành bằng cách viết theo thứ tự ngược lại, ta được thương là 3 và số dư là 5 nên ta có phương trình: $10x + y = 3(10y + x) + 5$

$$\begin{aligned} \text{Vậy, ta có hệ phương trình: } & \begin{cases} x = y + 7 \\ 10x + y = 3(10y + x) + 5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - y = 7 \\ 7x - 29y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 7y = 49 \\ 7x - 29y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 22y = 44 \\ x - y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 9 \end{cases} \text{ (TMĐK)} \end{aligned}$$

Trả lời: Vậy số đã cho là 92.

III. Toán chuyển động đều

Bài toán 7. Hai xe cùng khởi hành một lúc tại hai điểm A và B cách nhau 60km. Nếu đi ngược chiều thì gặp nhau sau 1 giờ; nếu đi cùng chiều thì xe đi nhanh sẽ đuổi kịp xe đi chậm sau 3 giờ. Tìm vận tốc mỗi xe?

Hướng dẫn: Quãng đường (S); vận tốc (v); thời gian (t), ta có: $S = v.t$

Lời giải

Gọi x, y theo thứ tự là vận tốc của xe đi nhanh và xe đi chậm ($x > y > 0$); x, y tính bằng km/h

- Sau 1 giờ hai xe đi ngược chiều gặp nhau, ta có phương trình $x + y = 60$.
- Sau 3 giờ hai xe đi được $3x$ (km) và $3y$ (km). Xe đi nhanh phải đi hết đoạn đường AB và còn đuổi kịp xe đi chậm, nên ta có phương trình $3x - 3y = 60$.

Vậy, ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ 3x - 3y = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 60 \\ x - y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 80 \\ x + y = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 20 \end{cases} \text{ (TMĐK)}$$

Trả lời: Xe đi nhanh có vận tốc là 40 (km/h); xe đi chậm có vận tốc là 20 (km/h).

Bài toán 8. Một ô tô đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy mỗi giờ nhanh hơn dự định 10 km thì đến nơi sớm hơn dự định 3 giờ, nếu xe chạy chậm lại mỗi giờ 10 km thì đến nơi chậm 5 giờ. Tính vận tốc dự định và quãng đường AB .

Hướng dẫn: Áp dụng công thức $S = v.t$ (S là quãng đường; v là vận tốc; t là thời gian)

Đặt ẩn: x là vận tốc dự định, y là thời gian dự định.

Lời giải

Gọi x (km/h) là vận tốc dự định của ô tô; y (h) là thời gian dự định để ô tô đi từ A đến B .

Điều kiện: $x > 0, y > 0$.

Quãng đường AB dài xy (km).

Theo đề bài, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy = (x+10)(y-3) \\ xy = (x-10)(y+5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = xy - 3x + 10y - 30 \\ xy = xy + 5x - 10y - 50 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 10y = -30 \\ 5x - 10y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 80 \\ 3x - 10y = -30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 15 \end{cases} \text{ (TMĐK)}$$

Trả lời: Vận tốc dự định của ô tô là 40 (km/h); quãng đường AB dài $40.15 = 600$ (km).

Bài toán 9. Một ô tô đi trên quãng đường AB với vận tốc 50 km/h; rồi tiếp tục đi từ B đến C với vận tốc 45 km/h. Biết quãng đường AC là 165 km và thời gian đi từ A đến B ít hơn thời gian đi từ B đến C là $\frac{1}{2}$ giờ. Tính thời gian ô tô đi trên hai quãng đường AB và BC .

Hướng dẫn: Đặt x là thời gian ô tô đi từ A đến B ; y là thời gian ô tô đi từ B đến C .

Lời giải

Gọi x (h) là thời gian ô tô đi từ A đến B ; y (h) là thời gian ô tô đi từ B đến C .

Điều kiện: $x > 0, y > 0$.

Khi đó, quãng đường AB là $50x$ (km), quãng đường BC là $45y$ (km).

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 50x + 45y = 165 \\ y - x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 50x + 45y = 165 \\ -50x + 50y = 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 95y = 190 \\ y - x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ (TMĐK)}$$

Trả lời: Thời gian ô tô đi từ A đến B hết $\frac{3}{2}$ giờ; thời gian ô tô đi từ B đến C hết 2 giờ.

IV. Toán về công việc làm chung

Bài toán 10. Hai người làm chung trong 4 ngày thì xong công việc. Nếu người thứ nhất là một mình trong 9 ngày rồi người thứ hai đến cùng làm tiếp trong 1 ngày nữa thì xong công việc. Hỏi mỗi người làm một mình thì bao lâu xong công việc?

Hướng dẫn:

Nếu một người làm trong 5 ngày thì xong một công việc thì trong 1 ngày người đó chỉ làm được $\frac{1}{5}$ công việc. (Năng suất trong 1 ngày được xét giống như vận tốc trong chuyển động đều).

Đặt ẩn: x là số ngày người thứ nhất làm một mình xong công việc, ta tính 1 ngày người đó làm được $\frac{1}{x}$ công việc; y là số ngày người thứ hai làm một mình xong công việc, ta cũng có 1 ngày người đó làm được $\frac{1}{y}$ công việc. (Số 1 ta gọi là “quy về đơn vị”).

Lời giải

Gọi x (ngày) là số ngày người thứ nhất làm một mình xong công việc.

$\Rightarrow$ 1 ngày người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc.

Gọi y (ngày) là số ngày người thứ hai làm một mình xong công việc.

$\Rightarrow$ 1 ngày người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ công việc.

Điều kiện: $x > 0, y > 0$.

Vậy cả hai người làm chung trong 1 ngày được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ (công việc), ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \quad (1)$$

Người thứ nhất là một mình trong 9 ngày rồi người thứ hai đến cùng làm tiếp trong 1 ngày nữa thì xong công việc, ta có phương trình: $\frac{10}{x} + \frac{1}{y} = 1 \quad (2)$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \\ \frac{10}{x} + \frac{1}{y} = 1 \end{cases}$$

Đặt: $u = \frac{1}{x}$; $v = \frac{1}{y}$, ta có hệ:
$$\begin{cases} u + v = \frac{1}{4} \\ 10u + v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9u = \frac{3}{4} \\ 10u + v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{12} \\ v = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Vậy:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 6 \end{cases}$$

Trả lời: Người thứ nhất làm một mình trong 12 ngày xong công việc; người thứ hai làm một mình trong 6 ngày xong công việc.

Chú ý: Phương trình: $\frac{10}{x} + \frac{1}{y} = 1$ biểu thị số phần công việc cả hai người làm chung (người thứ nhất làm trong 10 ngày, người thứ hai chỉ làm trong 1 ngày. Số 1 ở vế phải biểu thị cho một đơn vị công việc đã hoàn thành (tổng các phần công việc của hai người làm xong công việc); ở Tiểu học, ta gọi là “quy về đơn vị”.

Bài toán 11. Hai người cùng làm chung một công việc trong 16 ngày thì xong. Nếu người thứ nhất làm 3 ngày và người thứ hai làm 6 ngày thì chỉ hoàn thành một phần tư công việc. Hỏi nếu làm riêng mỗi người làm trong bao lâu thì xong?

Hướng dẫn: Xem lời giải Bài toán 10.

Lời giải

Gọi x (ngày), y (ngày) lần lượt là số ngày người thứ nhất và người thứ hai làm một mình hoàn thành công việc.

Điều kiện: $x > 0$, $y > 0$.

Như vậy, 1 ngày người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc, người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ công việc,

do đó hai người làm một ngày được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ công việc.

Theo đề bài ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16} \\ \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Đặt: $u = \frac{1}{x}$; $v = \frac{1}{y}$ ($u > 0, v > 0$), ta có hệ:
$$\begin{cases} u + v = \frac{1}{16} \\ 3u + 6v = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Giải hệ, ta được $u = \frac{1}{24}$; $v = \frac{1}{48}$.

Từ đó, ta tìm được $x = 24, y = 48$ (thỏa mãn điều kiện $x > 0, y > 0$).

Trả lời: Người thứ nhất làm một mình trong 24 ngày; người thứ hai làm một mình trong 48 ngày thì xong công việc.

$$\text{Đặt } u = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{y} \quad (u > 0, v > 0) \text{ ta có hệ: } \begin{cases} u + v = \frac{1}{16} \\ 3u + 6v = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ, ta được: } u = \frac{1}{24}; v = \frac{1}{48}.$$

Từ đó, ta tìm được: $x = 24; y = 48$ (thỏa mãn điều kiện $x > 0, y > 0$).

Trả lời: Người thứ nhất làm một mình trong 24 ngày; người thứ hai làm một mình trong 48 ngày thì xong công việc.

Bài toán 12. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể (không có nước) trong 49 giờ 48 phút thì đầy bể.

Nếu mở vòi thứ nhất trong 3 giờ và vòi thứ hai trong 4 giờ thì được $\frac{3}{4}$ bể nước. Hỏi mỗi vòi chảy riêng thì trong bao lâu sẽ đầy bể.

Hướng dẫn:

Đặt ẩn: x, y là thời gian vòi thứ nhất, thứ hai chảy riêng đầy bể (x, y tính bằng giờ).

Trong 1 giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ bể; vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{y}$ bể.

(Bài toán được xét như bài toán 11).

Lời giải

Gọi x, y thứ tự là số giờ để vòi thứ nhất, vòi thứ hai chảy riêng đầy bể ($x > 0, y > 0$).

Ta có 4 giờ 48 phút $= \frac{24}{5}$ giờ

Mỗi giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ (bể); và thứ hai chảy được $\frac{1}{y}$ (bể) và cả hai vòi chảy được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ (bể).

Ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{\frac{24}{5}}$ hay $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{24}$

Vòi thứ nhất chảy 3 giờ; vòi thứ hai chảy 4 giờ được $\frac{3}{4}$ bể, ta có phương trình: $\frac{3}{x} + \frac{4}{y} = \frac{3}{4}$

$$\text{Vậy, ta có hệ: } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{24} \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Đặt $u = \frac{1}{x}; v = \frac{1}{y}$ ($u > 0, v > 0$).

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} u+v=\frac{5}{24} \\ 3u+4v=\frac{3}{4} \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} 3u+3v=\frac{5}{8} \\ 3u+4v=\frac{3}{4} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} u=\frac{1}{12} \\ v=\frac{1}{8} \end{cases}$$

Ta tìm được: $x=12; y=8$ (thỏa mãn điều kiện $x>0, y>0$).

Trả lời: Vòi thứ nhất chảy một mình trong 12 giờ đầy bể, vòi thứ hai chảy một mình trong 8 giờ đầy bể.

Bài toán 13. Hai người cùng làm chung một công việc trong 15 giờ thì được $\frac{1}{6}$ công việc. Nếu người thứ nhất làm một mình trong 12 giờ; người thứ hai trong 20 giờ thì cả hai làm được $\frac{1}{5}$ công việc.

Hỏi mỗi người làm riêng thì trong bao lâu sẽ xong?

Hướng dẫn: Xem lời giải bài toán 12 .

Lời giải

Gọi x, y là thời gian để người thứ nhất và người thứ hai làm riêng xong công việc

($x>0, y>0$), $x; y$ tính bằng giờ; trong 1 giờ người thứ hai là $\frac{1}{y}$ công việc,

người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc.

$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} 15 \cdot \frac{1}{x} + 15 \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ 12 \cdot \frac{1}{x} + 20 \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Đặt $u=\frac{1}{x}; v=\frac{1}{y}$ ($u>0, v>0$), ta có hệ:

$$\begin{cases} 15u+15v=\frac{1}{6} \\ 12u+20v=\frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 60u+60v=\frac{2}{3} \\ 60u+100v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 40v=\frac{1}{3} \\ 12u+20v=\frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=\frac{1}{120} \\ u=\frac{1}{360} \end{cases}.$$

Ta tìm được: $x=360; y=120$.

Trả lời: Người thứ nhất làm một mình trong 360 giờ thì xong công việc, người thứ hai làm một mình trong 120 giờ thì xong công việc.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

A. TRẮC NGHIỆM

1. Cặp số nào sau đây là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 5x + 7y = -1 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases}$?

- A. $(-1; 1)$. B. $(-3; 2)$. C. $(2; -3)$.
D. $(5; 5)$.

2. Trên mặt phẳng tọa độ xOy , cho các điểm $A(1; 2)$; $B(5; 6)$; $C(2; 3)$; $D(-1; -1)$. Đường thẳng $4x - 3y = -1$ đi qua hai điểm nào trong các điểm đã cho?

- A. A và B ; B. B và C ; C. C và D ;
D. D và A .

3. Hệ phương trình $\begin{cases} 1,5x - 0,6y = 0,3 \\ -2x + y = -2 \end{cases}$

- A. Có nghiệm là $(0; -0,5)$. B. Có nghiệm là $(1; 0)$.
C. Có nghiệm là $(-3; -8)$. D. Vô nghiệm.

4. Hệ phương trình $\begin{cases} 0,6x + 0,3y = 1,8 \\ 2x + y = -6 \end{cases}$

- A. Có một nghiệm. B. Vô nghiệm.
C. Có vô số nghiệm. D. Có hai nghiệm là $(1; 0)$.

Hướng dẫn - Đáp số

1. Dùng MTCT.

Chọn B.

2. Chọn C.

3. Chọn C.

4. Hệ viết lại dưới dạng: $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 2x + y = -6 \end{cases}$. Vậy hệ vô nghiệm.

Chọn B.

B. TỰ LUẬN

1. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ \frac{2}{5}x + y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 0,2x + 0,1y = 0,3 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{3}{2}x - y = \frac{1}{2} \\ 6x - 4y = 2 \end{cases}$

2. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 0,5x + 2y = -2,5 \\ 0,7x - 3y = 8,1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 5x - 3y = -2 \\ 14x + 8y = 19 \end{cases}$;

$$c) \begin{cases} 2(x-2)x + 3(1+y) = -2 \\ 3(x-2)x - 2(1+y) = -3 \end{cases}$$

3. Giải các hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = -1 \\ (1+\sqrt{3})x - \sqrt{2}y = \sqrt{2} \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} 4x - 3y = -10 \\ \frac{x}{2} + \frac{5y}{4} = 2 \end{cases}$$

4. Tìm a để hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x - 3 = 0 \\ x + (a-1)y = \frac{3}{2} \end{cases}$$
 có nghiệm duy nhất.

5. Hai người cùng làm một công việc trong 7 giờ 12 phút thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 6 giờ; người thứ hai làm trong 3 giờ thì cả hai người làm được $\frac{2}{3}$ công việc. Hỏi nếu mỗi người làm một mình thì trong bao lâu sẽ xong.

6. Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi 140 m. Ba lần chiều rộng lớn hơn chiều dài là 10 m. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn.

7. Hai loại quặng chứa 75% và 50% sắt. Tính khối lượng của mỗi loại quặng đem trộn để được 25 tấn quặng có chứa 66% sắt.

8. Một ô tô dự định đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy với vận tốc 35 (km/h) thì đến chậm 2 giờ. Nếu xe chạy với vận tốc 50 (km/h) thì đến sớm 1 giờ.

Tính quãng đường và thời gian dự định đi lúc đầu.

9. Hai năm trước đây, tuổi của anh gấp đôi tuổi của em, còn 8 năm trước đây gấp 5 lần tuổi em. Hỏi hiện nay anh và em bao nhiêu tuổi?

Hướng dẫn - Đáp số

$$1. a) \begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ \frac{2}{5}x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ 2x + 5y = 5 \end{cases}$$

Hệ vô nghiệm.

b) Đáp số: $(x; y) = (2; 1)$.

$$c) \begin{cases} \frac{3}{2}x - y = \frac{1}{2} \\ 6x - 4y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$\text{Hệ có vô số nghiệm: } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{3x-1}{2} \end{cases}$$

2. a) Dùng phương pháp cộng đại số: Đáp số: $(3; -2)$.

b) Đáp số: $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

c) Dùng phương pháp đặt ẩn phụ:

$$u = x - 2; v = 1 + y. \text{ Ta có hệ: } \begin{cases} 2u + 3v = -2 \\ 3u - 2v = -3 \end{cases}$$

Ta tìm được: $\begin{cases} u = -1 \\ v = 0. \end{cases}$

Đáp số: $(x; y) = (1; -1)$.

$$\begin{aligned} 3. a) \text{ Ta có } \begin{cases} \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = -1 \\ (1 + \sqrt{3})x - \sqrt{2}y = \sqrt{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \sqrt{6}y = -\sqrt{2} \\ (3 + \sqrt{3})x - \sqrt{6}y = \sqrt{6} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (1 + \sqrt{3})x = \sqrt{6} + \sqrt{2} \\ \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Hệ có nghiệm duy nhất: $(\sqrt{2}; \sqrt{3})$.

$$b) \text{ Ta có: } \begin{cases} 4x - 3y = -10 \\ 2x + 5y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y = -10 \\ 4x + 10y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13y = 26 \\ 4x - 3y = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất: $(-1; 2)$.

$$4. \text{ Ta có: } \begin{cases} 2x - 3 = 0 \\ ax + (a - 1)y = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ ax + (a - 1)y = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ (a - 1)y = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}a \end{cases} (*)$$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow a - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$.

$$5. 7 \text{ giờ } 12 \text{ phút} = \frac{36}{5} \text{ giờ}$$

Gọi x, y là thời gian để người thứ nhất và người thứ hai làm một mình xong công việc ($x > 0, y > 0$) (x, y tính theo giờ).

Một giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc, một giờ người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ công việc.

$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{36} \\ \frac{6}{x} + \frac{3}{y} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Đặt $u = \frac{1}{x}; v = \frac{1}{y}$ ($u > 0, v > 0$). Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u + v = \frac{5}{36} \\ 6u + 3v = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u + 3v = \frac{15}{36} \\ 6u + 3v = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u = \frac{1}{4} \\ u + v = \frac{5}{36} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{12} \\ v = \frac{1}{18} \end{cases}$$

Vậy $x = 12; y = 18$.

Trả lời: Người thứ nhất làm một mình trong 12 giờ; người thứ hai làm một mình trong 18 giờ thì xong công việc.

6. Gọi x, y lần lượt là chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn ($x > 0; y > 0$); (x, y tính bằng m). Chu vi là 140 m, nên ta có phương trình:

$$2(x + y) = 140 \Leftrightarrow x + y = 70.$$

Ba lần chiều rộng lớn hơn chiều dài 10 m, nên ta có phương trình $3y - x = 10$

$$\text{Vậy, ta có hệ: } \begin{cases} x + y = 70 \\ 3y - x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = 80 \\ x + y = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 20 \\ x = 70 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 20 \end{cases}$$

Trả lời: Chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn lần lượt là 50 m và 20 m.

7. Gọi x, y là khối lượng của mỗi loại quặng chứa 75% và 50% sắt ($x > 1; y > 0$ (x, y tính bằng tấn)).

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 25 \\ 75\%x + 50\%y = 25.66\% \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 25 \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = \frac{33}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 25 \\ 3x + 2y = 66 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 50 \\ 3x + 2y = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ x + y = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 9 \end{cases}$$

Trả lời:

Loại quặng 75% sắt cần 16 (tấn);

Loại quặng 50% sắt cần 9 (tấn).

8. Gọi x (km) là quãng đường AB ($x > 0$); y (km/h) là vận tốc dự định của ô tô ($y > 0$).

Thời gian dự định đi hết quãng đường AB là $\frac{x}{y}$ (h).

Nếu đi vận tốc 35 km/h thì thời gian đi lúc này là $\frac{x}{35}$ (h).

Nếu đi vận tốc 50 (km/h) thì thời gian là $\frac{x}{50}$ (h).

$$\text{Theo bài ra, ta có hệ phương trình: } \begin{cases} \frac{x}{35} - \frac{x}{y} = 2 \\ \frac{x}{y} - \frac{x}{50} = 1 \end{cases}$$

Cộng vế với vế (1) và (2), ta được:

$$\frac{x}{35} - \frac{x}{50} = 3 \Leftrightarrow 15x = 5250 \Leftrightarrow x = 350 \text{ (Nhận)}$$

Thế $x = 350$ vào (1), ta tìm được $y = 43,75$ (nhận).

Trả lời: Quãng đường AB dài 350 (km); thời gian dự định là $\frac{350}{43,75} = 8$ (giờ).

PHÂN LOẠI VÀ GIẢI CHI TIẾT CÁC DẠNG TOÁN 9

9. Gọi x, y lần lượt là tuổi của người anh và người em ($x > y > 0$ và $x \in \mathbb{N}; y \in \mathbb{N}$).

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - 2 = 2(y - 2) \\ x - 8 = 5(y - 8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -2 \\ x - 5y = -32 \end{cases}$$

Trừ vế cho vế hai phương trình, ta được $3y = 30 \Leftrightarrow y = 10$.

Thế $y = 10$ vào phương trình (*), ta có $x - 2 \cdot 10 = -2 \Leftrightarrow x = 18$.

Vậy tuổi của hai anh em là 10 và 18.