

CHUYÊN ĐỀ

SỰ ĐỒNG QUY CỦA BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC, BA ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Đường trung trực của tam giác:

Định nghĩa: Trong một tam giác, đường trung trực của mỗi cạnh được gọi là đường trung trực của tam giác đó.

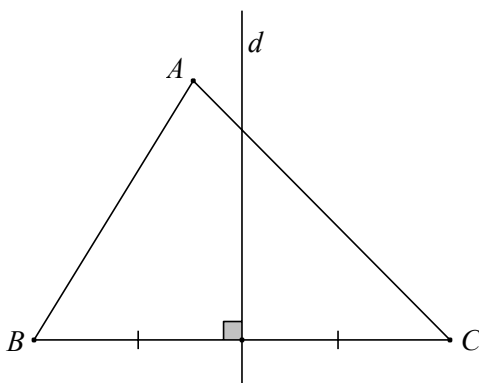
Định lý 1: Ba đường trung trực của tam giác đồng quy tại một điểm. Điểm đó cách đều ba đỉnh của tam giác.

Nhận xét: Vì giao điểm của ba đường trung trực của tam giác cách đều ba đỉnh của tam giác nên là tâm đường tròn đi qua ba đỉnh tam giác đó.

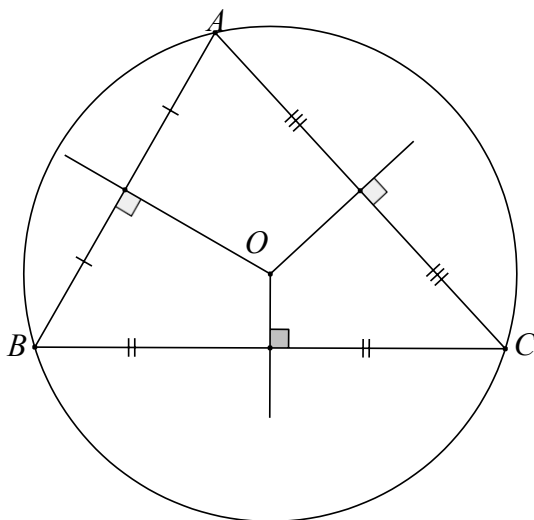
Tính chất: $\triangle ABC$ cân tại A , AM là đường trung tuyến thì nó cũng là đường trung trực của BC

Cụ thể:

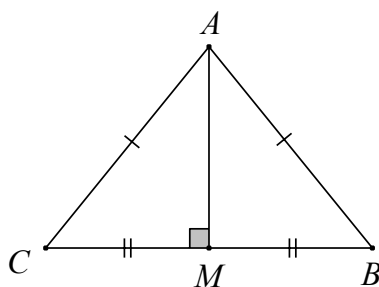
a) Cho $\triangle ABC$, (d) là đường trung trực của cạnh BC thì (d) gọi là đường trung trực của $\triangle ABC$ ứng với cạnh BC .



b) Trong hình sau, điểm O là giao điểm các đường trung trực của $\triangle ABC$. Ta có $OA = OB = OC$. Điểm O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.



c) $\triangle ABC$ cân tại A , AM là đường trung tuyến thì cũng là đường trung trực của BC



2. Đường cao của tam giác:

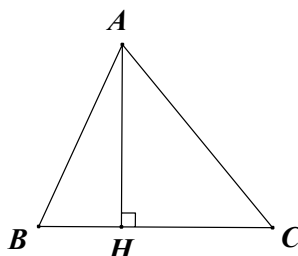
Định nghĩa: Đoạn thẳng kẻ từ một đỉnh tam giác và vuông góc với cạnh đối diện gọi là đường cao của tam giác đó.

Định lý 2: Ba đường cao của tam giác đồng quy tại một điểm.

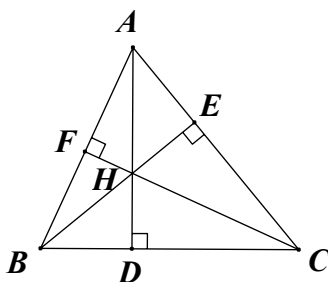
Điểm đó được gọi là trực tâm của tam giác.

Cụ thể:

a) AH là một đường cao của $\triangle ABC \Leftrightarrow AH \perp BC$

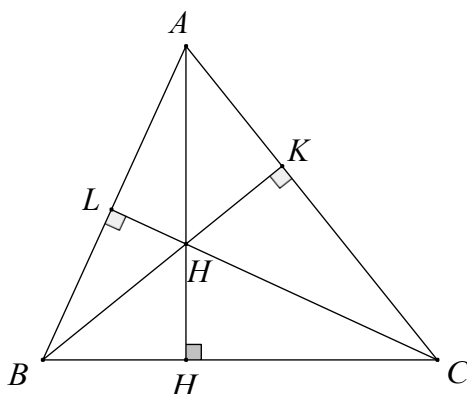


b) Trong hình vẽ AD, BE, CF là các đường cao, H là trực tâm của $\triangle ABC$.

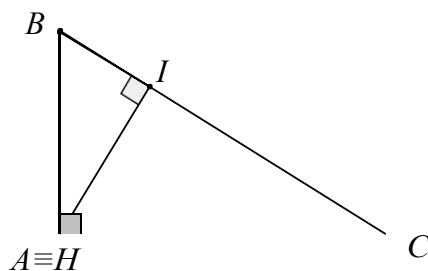


Chú ý:

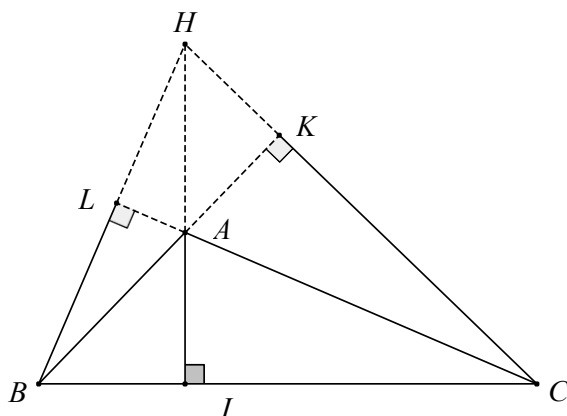
a) $\triangle ABC$ là tam giác nhọn thì H nằm trong tam giác.



b) $\triangle ABC$ là tam giác vuông tại A thì điểm H trùng với điểm A .

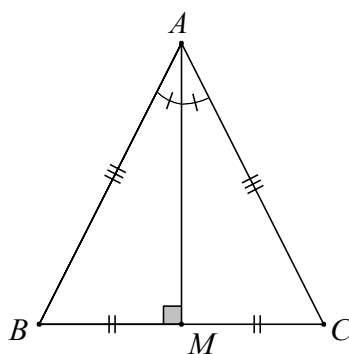


c) $\triangle ABC$ là tam giác tù thì điểm H nằm ngoài tam giác.



3. Bổ sung:

Tính chất trong tam giác cân: $\triangle ABC$ cân tại A , AM là đường cao thì nó cũng là đường trung trực, đường trung tuyến, đường phân giác.



PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI.

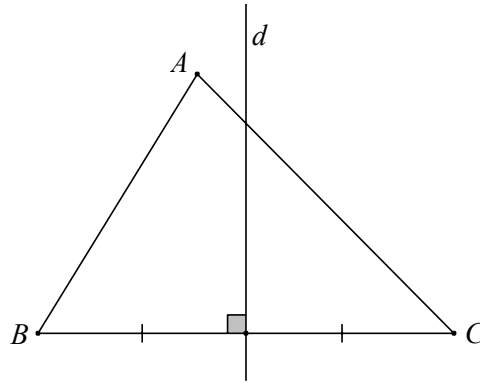
BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC

Dạng 1. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác

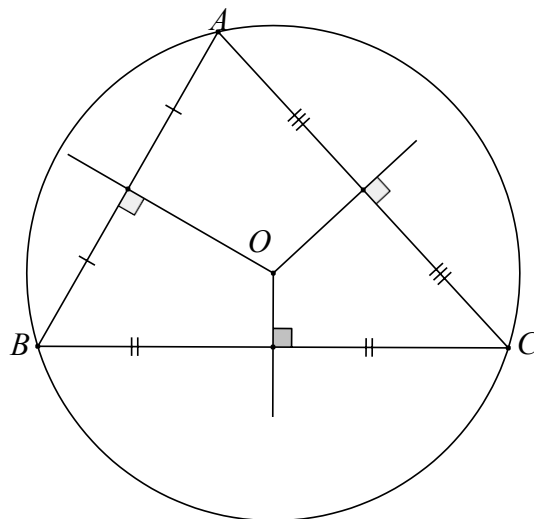
I. Phương pháp giải:

- Dựa vào định nghĩa và sự đồng quy của ba đường trung trực trong tam giác.
- Sử dụng tính chất giao điểm các đường trung trực trong tam giác thì cách đều ba đỉnh của tam giác đó.

1. Cho $\triangle ABC$, (d) là đường trung trực của cạnh BC thì (d) gọi là đường trung trực của $\triangle ABC$ ứng với cạnh BC .



2. Điểm O là giao điểm các đường trung trực của $\triangle ABC$. Ta có $OA = OB = OC$. Điểm O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.



II. Bài toán.

Bài 1. Chọn đáp án đúng. Điểm cách đều 3 đỉnh của tam giác là giao điểm của:

- A. 3 đường trung tuyến.
- B. 3 đường phân giác.
- C. 3 đường trung trực.
- D. 3 đường cao.

Lời giải:

Điểm nằm trong và cách đều 3 đỉnh của tam giác là giao điểm của 3 đường trung trực. Chọn đáp án C.

Bài 2. Chọn đáp án đúng.

a) Cho $\triangle ABC$ tù, giao điểm 3 đường trung trực của tam giác nằm:

- A. trong $\triangle ABC$.

B. ngoài $\triangle ABC$.

C. trên 1 cạnh của $\triangle ABC$.

D. trùng với 1 đỉnh của $\triangle ABC$.

b) Cho $\triangle ABC$ có $A = 90^\circ$ thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác:

A. nằm trong $\triangle ABC$

B. nằm ngoài $\triangle ABC$

C. là trung điểm của cạnh BC

D. trùng với đỉnh A của $\triangle ABC$

c) Cho $\triangle ABC$ nhọn, giao điểm 3 đường trung trực của tam giác nằm:

A. trong $\triangle ABC$

B. ngoài $\triangle ABC$

C. trên một cạnh của $\triangle ABC$

D. trùng với một đỉnh của $\triangle ABC$

Lời giải:

a) Cho $\triangle ABC$ nhọn, giao điểm 3 đường trung trực của tam giác nằm trong $\triangle ABC$. Chọn đáp án B

b) Cho $\triangle ABC$ có $A = 90^\circ$ thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm của cạnh BC . Chọn đáp án C.

c) Cho $\triangle ABC$ nhọn, giao điểm 3 đường trung trực của tam giác nằm trong $\triangle ABC$. Chọn đáp án A.

Bài 3. Cho $\triangle ABC$. Vẽ điểm O cách đều ba đỉnh A, B, C và vẽ đường tròn đi qua 3 đỉnh của tam giác trong mỗi trường hợp sau:

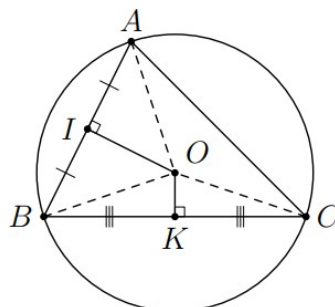
a, $\triangle ABC$ là tam giác nhọn.

b, $\triangle ABC$ vuông tại A .

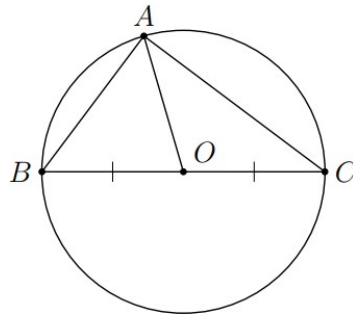
c, $\triangle ABC$ là tam giác tù.

Lời giải:

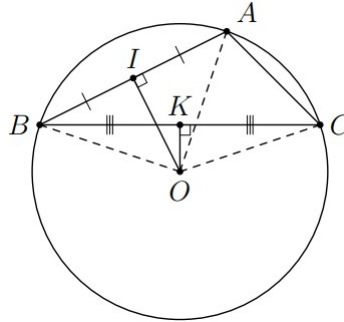
a, $\triangle ABC$ là tam giác nhọn.



b, $\triangle ABC$ vuông tại A .

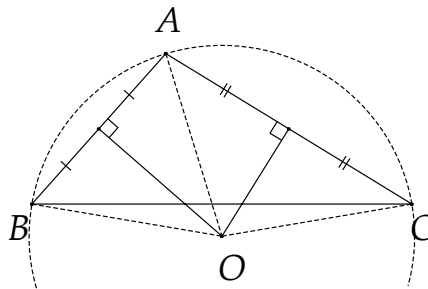


c, $\triangle ABC$ là tam giác tù.



Bài 4. Cho A, B, C là ba điểm phân biệt không thẳng hàng. Xác định đường tròn đi qua ba điểm đó.

Lời giải:



Gọi đường tròn đi qua ba điểm A, B, C có tâm O ta có $OA = OB = OC$.

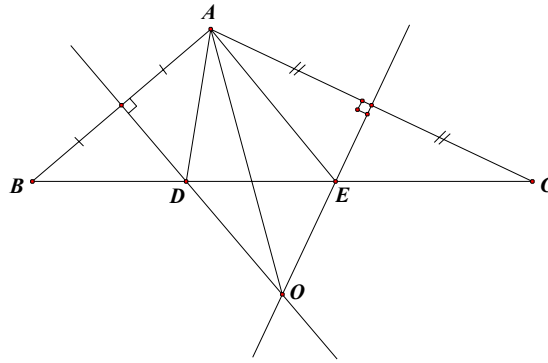
Ba điểm phân biệt A, B, C không thẳng hàng tạo thành tam giác ABC .

Vì $OA = OB = OC$ nên O là giao điểm ba đường trung trực của tam giác ABC .

Vậy đường tròn đi qua ba điểm A, B, C có tâm O là giao của ba đường trung trực của $\triangle ABC$ và bán kính bằng OA .

Bài 5. Cho $\triangle ABC$ có $A > 90^\circ$. Các đường trung trực của AB và của AC cắt nhau ở O và cắt BC theo thứ tự ở D và E . Nối AD, AE, OB, OC . Tìm tam giác bằng $\triangle OAD$, bằng $\triangle OAE$.

Lời giải:



OD là đường trung trực của AB
suy ra $DA = DB$, $OA = OB$.

Do đó $\triangle OAD = \triangle OBD$ (c.c.c)

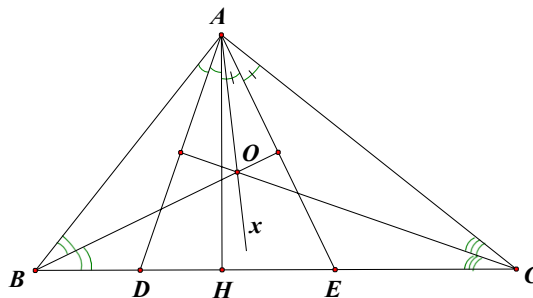
Tương tự $\triangle OAE = \triangle OCE$.

Bài 6. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Tia phân giác của các góc BAH và CAH cắt BC lần lượt ở D và E . Gọi O là giao điểm các đường phân giác của tam giác ABC .

a) Chứng minh rằng đường tròn tâm O , bán kính OA đi qua ba điểm A, D, E .

b) Tính số đo góc DOE .

Lời giải:



a) Ta có

$$BAE = BAC - EAC = 90^\circ - EAC \quad (1)$$

$$AEB = 90^\circ - HAE \quad (2)$$

Mà $EAC = HAE$ (gt), do đó từ (1), (2) suy ra $BAE = AEB$ nên $\triangle AEB$ cân tại B .

Vì O là giao điểm các đường phân giác của tam giác ABC nên BO là đường phân giác của tam giác cân ABE , do đó BO là đường trung trực của AE , suy ra $OA = OE$ (3)

Chứng minh tương tự, CO là đường trung trực của AD , suy ra $OA = OD$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $OA = OD = OE$. Điều này chứng tỏ ba điểm A, E, D nằm trên đường tròn tâm O , bán kính OA hay đường tròn tâm O bán kính OA đi qua 3 điểm A, E, D .

b) Từ (3) suy ra $\triangle OAE$ cân tại O , nên $OAE = OEA$. Vẽ tia Ox là tia đối của tia OA , ta có $EOx = OAE + OEA = 2xAE$.

Tương tự, $xOD = 2xAD$.

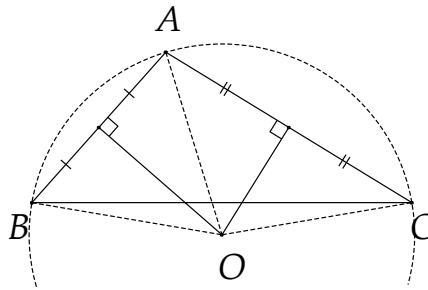
Do đó, $DOE = 2(xAD + xAE) = 2DAE = 2(DAH + HAE)$

$$= 2 \cdot \frac{BAH + HAC}{2} = 2 \cdot \frac{BAC}{2} = 90^\circ.$$

Vậy $DOE = 90^\circ$

Bài 7. Tam giác ABC có A là góc tù. Các đường trung trực của các cạnh AB và AC cắt nhau ở O . Các điểm B và C có thuộc đường tròn tâm O bán kính OA hay không? Vì sao?

Lời giải



Từ giả thiết suy ra $OA = OB = OC$. Vậy các điểm B và C có thuộc đường tròn tâm O bán kính OA .

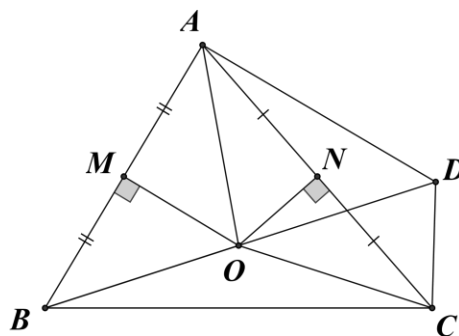
Bài 8. Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn, O là giao điểm hai đường trung trực của AB và AC . Trên tia đối của tia OB lấy điểm D sao cho $OB = OD$.

a) Chứng minh O thuộc đường trung trực của AD và CD .

b) Chứng minh các $\triangle ABD$, $\triangle CBD$ vuông.

c) Biết $ABC = 70^\circ$. Hãy tính số đo ADC .

Lời giải



a) Vì O là giao điểm hai đường trung trực của AB và AC nên $OA = OB = OC$.

Mà $OD = OB$ nên $OD = OA$ và $OD = OC$

$\Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của AD và CD .

b) Xét $\triangle OAB$ cân tại $O \Rightarrow OAB = OBA = \frac{180^\circ - AOB}{2}$

Xét $\triangle OAD$ cân tại $O \Rightarrow OAD = ODA = \frac{180^\circ - AOD}{2}$

$$\Rightarrow OAB + OAD = \frac{180^\circ - AOB}{2} + \frac{180^\circ - AOD}{2}$$

$$= 180^\circ - \frac{AOB + AOD}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BAD = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle ABD \text{ vuông tại } A.$$

Chứng minh tương tự $\triangle CBD$ vuông tại C .

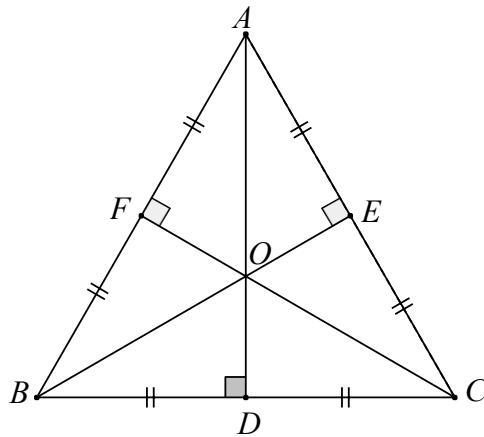
c) Ta có $\triangle ABD$ vuông tại A nên $\angle ADB = 90^\circ - \angle ABD$

Ta có $\triangle BCD$ vuông tại C nên $\angle BDC = 90^\circ - \angle CBD$

$$\Rightarrow \angle ADO + \angle ODC = 180^\circ - (\angle ABO + \angle BCO)$$

$$\Rightarrow \angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

Bài 9. Tam giác ABC có ba đường trung tuyến cắt nhau tại O . Biết rằng điểm O cũng là giao điểm của ba đường trung trực trong tam giác ABC . Chứng minh tam giác ABC đều.



Lời giải:

Cách 1:

Cho AO cắt BC tại F , BO cắt AC tại E , CO cắt AB tại D .

Suy ra D, E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC .

Vì O là giao điểm 3 đường trung trực nên $OD \perp AB$ tại D , $OE \perp AC$ tại E , $OF \perp BC$ tại F .

Suy ra AD, BE, CF là 3 đường trung trực của $\triangle ABC$.

Vì AD đường trung trực của $\triangle ABC$ nên $AB = AC$ (1)

Vì BE đường trung trực của $\triangle ABC$ nên $BA = BC$ (2)

Từ (1) (2) suy ra $AB = AC = BC$ suy ra $\triangle ABC$ đều.

Cách 2:

Cho AO cắt BC tại F , BO cắt AC tại E , CO cắt AB tại D .

Suy ra D, E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC .

Vì O là giao điểm 3 đường trung trực nên $OD \perp AB$ tại D , $OE \perp AC$ tại E , $OF \perp BC$ tại F .

Suy ra AD, BE, CF là 3 đường trung trực của $\triangle ABC$.

Xét $\triangle AFB$ và $\triangle AFC$ có:

AF chung

$$\angle AFB = \angle AFC (= 90^\circ)$$

$BF = CF$ (vì AF là trung trực của BC)

Do đó: $\triangle AFB = \triangle AFC$ (c.g.c)

$$\Rightarrow AB = AC$$

Chứng minh tương tự ta được: $BA = BC$

Do đó: $AB = AC = BC$

Vậy $\triangle ABC$ là tam giác đều.

Bài 10. Cho $\triangle ABC$ đều. Trên cạnh AB, BC, CA lấy theo thứ tự ba điểm M, N, P sao cho $AM = BN = CP$

a. Chứng minh $\triangle MNP$ là tam giác đều

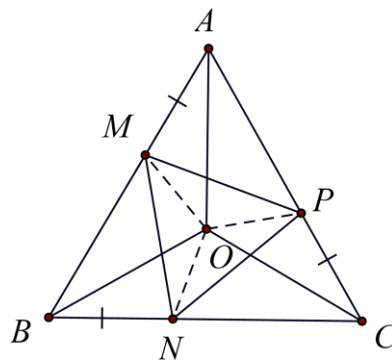
b. Gọi O là giao điểm các đường trung trực của $\triangle ABC$.

Chứng minh rằng điểm O cũng là giao điểm các đường trung trực của $\triangle MNP$

Lời giải:

a) $\triangle ABC$ đều nên $AB = BC = CA$

Mà $AM = BN = CP \Rightarrow BM = CN = AP$



Xét $\triangle AMP$ và $\triangle BNM$ có

$$AM = BN \text{ (gt)}$$

$$\angle MAP = \angle NBM \text{ (}\triangle ABC \text{ đều)}$$

$$AP = BM \text{ (cmt)}$$

Do đó, $\triangle AMP = \triangle BNM$ (c.g.c)

$$\Rightarrow MP = MN \text{ (hai cạnh tương ứng) (1)}$$

Tương tự: $\triangle AMP = \triangle CPN$ (c.g.c)

$$\text{Suy ra } MP = PN \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) ta có $MP = MN = PN$

Vậy $\triangle MNP$ là tam giác đều.

b) Điểm O là giao điểm các đường trung trực của tam giác đều ABC nên $OA = OB = OC$ đồng thời AO, BO, CO cũng lần lượt là các tia phân giác của BAC, ABC, ACB .

Xét $\triangle MAO$ và $\triangle NBO$ có:

$$\begin{aligned} AM &= BN \text{ (gt)} \\ MAO &= NBO \left(= \frac{1}{2} BAC = \frac{1}{2} ABC \right) \end{aligned}$$

$$OA = OB \text{ (cmt)}$$

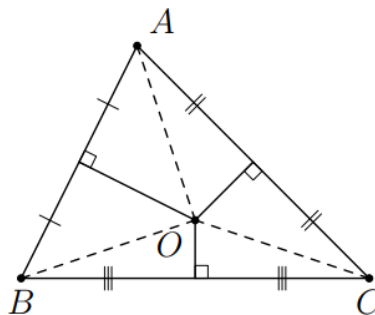
$$\Rightarrow \triangle MAO = \triangle NBO \text{ (c.g.c)} \Rightarrow OM = ON \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

Tương tự : $\triangle MAO = \triangle PCO$ (c.g.c) $\Rightarrow OM = OP$.

Vậy $OM = ON = OP$. Do đó O là giao điểm các đường trung trực của $\triangle MNP$.

Bài 11. Trong một buổi tổng vệ sinh sân trường, 3 tổ cần dọn cỏ và rác của 3 bồn cây A, B, C ở 3 góc sân trường. Em hãy giúp 3 tổ chọn một vị trí O để đặt chiếc xe đẩy rác sao cho vị trí chiếc xe cách đều 3 bồn cây đó.

Lời giải:



Vì điểm O cách đều ba điểm A, B, C nên O là giao của ba đường trung trực của tam giác ABC hay O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Để xác định vị trí điểm O ta chỉ cần xác định giao điểm của hai trong ba đường trung trực của tam giác ABC .

Dạng 2. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy, ba điểm thẳng hàng

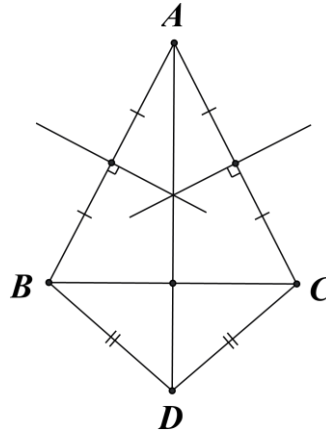
I. Phương pháp giải:

Dựa vào định lý, tính chất về đường trung trực và sự đồng quy của ba đường trung trực trong tam giác.

II. Bài toán.

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Dựng tam giác BCD cân tại D biết D khác phía với A đối với đường thẳng BC . Gọi O là giao điểm của AB và AC . Chứng minh rằng A, O, D thẳng hàng.

Lời giải:



$\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow AB = AC$.

$\triangle BCD$ cân tại $D \Rightarrow DB = DC$.

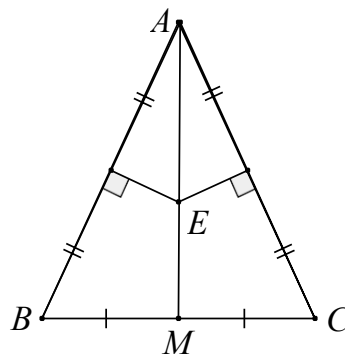
Suy ra AD là đường trung trực của BC .

Xét $\triangle ABC$, theo tính chất ba đường trung trực trong tam giác ta có các đường trung trực của AB và AC đồng quy với đường thẳng AD , hay A, O, D thẳng hàng.

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Gọi M là trung điểm của BC . Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau ở E .

Chứng minh ba điểm A, E, M thẳng hàng.

Lời giải:



Theo gt, M là trung điểm của BC

$\Rightarrow AM$ là đường trung tuyến của tam giác cân ABC

$\Rightarrow AM$ cũng là đường trung trực của BC (1)

Xét $\triangle ABC$ cân tại A có đường trung trực của AB và AC cắt nhau ở E

$\Rightarrow E$ thuộc đường trung trực của BC (theo tính chất ba đường trung trực của tam giác) (2)

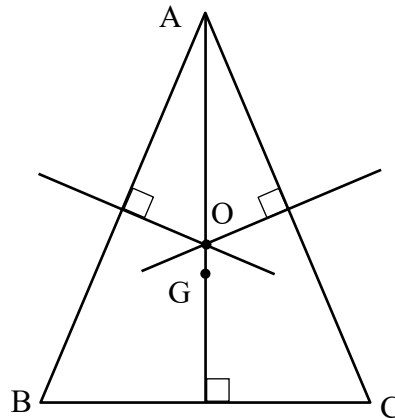
Từ (1) và (2) suy ra, ba điểm A, E, M thẳng hàng.

Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi G là trọng tâm, O là giao điểm ba đường trung trực của tam giác ABC .

a) Tam giác BOC là tam giác gì?

b) Chứng minh ba điểm A, O, G thẳng hàng?

Lời giải:



a) Do O là giao điểm ba đường trung trực của tam giác ABC nên ta có: $OA = OB = OC$

Suy ra tam giác BOC là tam giác cân tại O

b) Do O là giao điểm ba đường trung trực của tam giác ABC nên O thuộc đường trung trực của BC (1)

Do G là trọng tâm nên G thuộc đường trung tuyến của BC đi qua A (2)

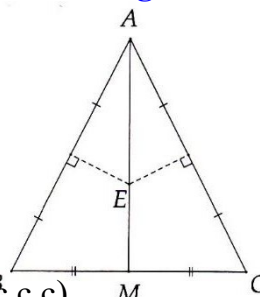
Mà tam giác ABC cân tại A nên trung tuyến ứng với cạnh BC cũng là đường trung trực của BC

Suy ra G thuộc đường trung trực của BC (3)

Từ (1), (2) và (3) Suy ra ba điểm A, O, G thẳng hàng

Bài 4. Cho tam giác ABC cân ở A . Gọi M là trung điểm của BC . Các đường trung trực của AB, AC cắt nhau ở E . Chứng minh ba điểm A, E, M thẳng hàng.

Lời giải:



Chứng minh được: $\triangle ABM = \triangle ACM$ (B.c.c). M

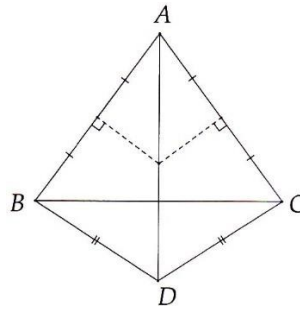
Từ đó, suy ra AM là đường trung trực của BC .

Theo tính chất ba đường trung trực của tam giác, ta suy ra điểm E thuộc đường trung trực của BC .

Vậy ba điểm A, E, M thẳng hàng.

Bài 5. Cho tam giác ABC cân tại A . Lấy điểm D sao cho tam giác BCD cân tại D (D và A nằm khác phía đối với đường thẳng BC). Chứng minh các đường trung trực của AB và AC đồng quy với đường thẳng AD

Lời giải:



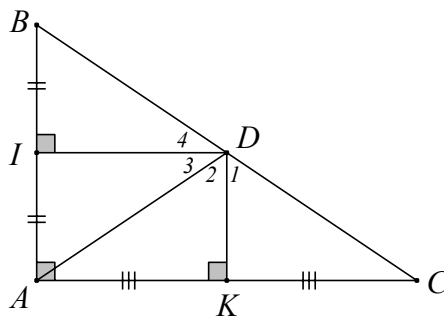
Từ giả thiết, ta có: $AB = AC, DB = DC$.

$\Rightarrow AD$ là đường trung trực của BC .

Xét $\triangle ABC$, theo tính chất ba đường trung trực trong tam giác ta có các đường trung trực của AB và AC đồng quy với đường thẳng AD .

Bài 6. Cho $\triangle ABC$ vuông ở A , D là giao điểm hai đường trung trực của hai cạnh AB và AC . Chứng minh B, D, C thẳng hàng.

Lời giải:



Gọi I là trung điểm của AB , K là trung điểm AC ta có $DI \perp AB$ và $DK \perp AC$.

Xét $\triangle DAK$ và $\triangle DCK$ có:

DK cạnh chung

$\angle DKA = \angle DKC (= 90^\circ)$

$AK = CK$ (hình vẽ)

$\Rightarrow \triangle DAK = \triangle DCK$ (c.g.c)

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$

CM tương tự: $\angle 3 = \angle 4$

Ta lại có $\angle 2 = 90^\circ - \angle DAK$ (hai góc phụ nhau)

$$D_3 = 90^\circ - DAI \text{ (hai góc phụ nhau)}$$

$$\Rightarrow D_2 + D_3 = 180^\circ - (DAI + DAK) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

$$\Rightarrow D_1 + D_2 + D_3 + D_4 = 2(D_2 + D_3) = 2.90^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BCD = 180^\circ$$

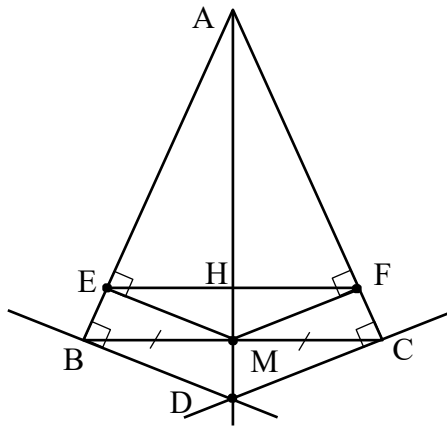
$\Rightarrow B, D, C$ thẳng hàng.

Bài 7. Cho tam giác ABC cân tại A . M là trung điểm của BC . Kẻ ME vuông góc AB tại E , MF vuông góc với AC tại F .

a) Chứng minh rằng AM là đường trung trực của EF ?

b) Kẻ đường thẳng d vuông góc AB tại B , kẻ đường thẳng d' vuông góc với AC tại C , hai đường thẳng d và d' giao nhau tại D . Chứng minh rằng ba điểm A, M, D thẳng hàng?

Lời giải:



a) Gọi H là giao điểm của AM và EF

Xét tam giác ABC cân tại A .

M là trung điểm $BC \Rightarrow AM$ là trung tuyến ứng với BC

$\Rightarrow AM$ là đường trung trực, cũng là đường phân giác của góc A

$\Rightarrow AE = AF$ và $\angle EAH = \angle FAH$

Xét hai tam giác EAH và FAH , có:

$AE = AF$ (cmt)

AH là cạnh chung

$\angle EAH = \angle FAH$ (cmt)

Suy ra $\triangle EAH = \triangle FAH$ (c.g.c)

$\Rightarrow HE = HF$ (2 cạnh tương ứng) (1) và $\angle AHE = \angle AHF$ (2 góc tương ứng)

Mà $\angle AHE + \angle AHF = 180^\circ$ (hai góc kề bù) $\angle AHE = \angle AHF = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra AH là đường trung trực của EF

Mà $OM = \frac{1}{2}BN$ vì thế $OM = \frac{1}{2}AH$.

b) Tam giác AGH có I là trung điểm của GA , K là trung điểm của GH nên $IK \parallel AH$ và $IK = \frac{1}{2}AH$ Suy ra $IK \parallel OM$ và $IK = OM$.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $GM = \frac{1}{2}GA$, do đó $GM = GI$

$\Rightarrow \triangle IKG = \triangle MGO$ (c.g.c).

c) Vì $\triangle IKG = \triangle MGO$ (theo phần b) nên $\angle IKG = \angle MGO$ mà

$\angle IKG + \angle KGM = 180^\circ$ do đó $\angle KGM + \angle MGO = 180^\circ$

Vậy ba điểm K, G, O thẳng hàng, suy ra ba điểm H, G, O thẳng hàng.

d) $\triangle IKG = \triangle MGO$ nên $GO = GK$ mà $HG = 2GK$ do đó $HG = 2GO$.

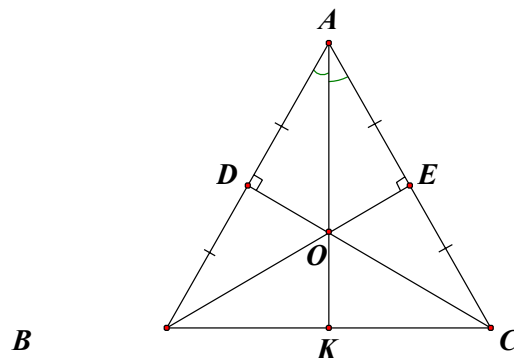
Chú ý: Đường thẳng đi qua ba điểm H, G, O được gọi là đường thẳng Ôle

Bài 9. Cho tam giác ABC cân ở A , đường phân giác AK . Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O . Kéo dài CO cắt AB ở D , kéo dài BO cắt AC ở E .

a) Chứng minh ba điểm A, K, O thẳng hàng.

b) Chứng minh AK và các đường trung trực của AD và AE đồng quy.

Lời giải:



a) Ta có: $AD = \frac{1}{2}AB$ (CD là trung trực của AB)

$AE = \frac{1}{2}AC$ (BE là trung trực của AC)

Mà $AB = AC$ (tam giác ABC cân ở A)

$\Rightarrow AD = AE$

Xét hai tam giác vuông ADO và AEO có: $AD = AE$ (cmt); AO : cạnh huyền chung

$\Rightarrow \triangle ADO = \triangle AEO$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông).

Suy ra $\angle DAO = \angle EAO$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow AO$ là đường phân giác của BAC .

Vậy ba điểm A, K, O thẳng hàng.

b) Ta có: $AD = AE$ (chứng minh phần a) (1).

Mặt khác, có $\triangle ADO = \triangle AEO$ (chứng minh phần a) $OD = OE$ (hai cạnh tương ứng) (2).

Từ (1) và (2) suy ra AO là đường trung trực của DE , hay AK là đường trung trực của DE .

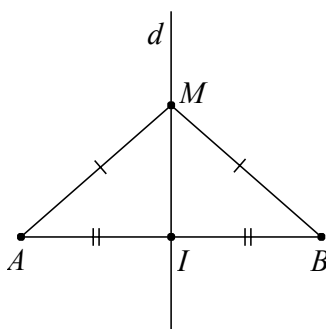
Xét $\triangle ADE$, theo tính chất ba đường trung trực của tam giác, ta có AK và các đường trung trực của AD và AE đồng quy.

Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường trung trực trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

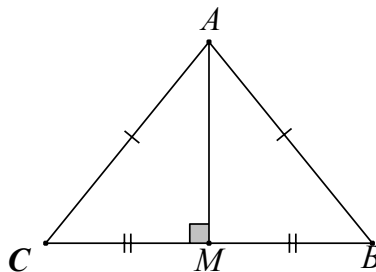
I. Phương pháp giải:

Dựa vào tính chất về đường trung trực và sự đồng quy của ba đường trung trực trong tam giác.

1. Điểm M nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng đó:



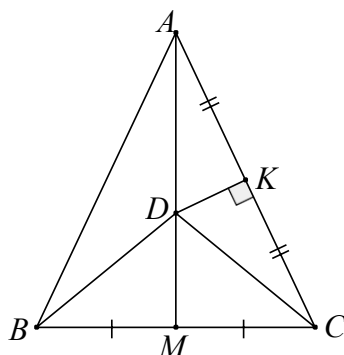
2. $\triangle ABC$ cân tại A , AM là đường trung tuyến thì cũng là đường trung trực của BC



II. Bài toán.

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ cân tại A , đường trung tuyến AM . Đường trung trực của AC cắt đường thẳng AM tại D . Chứng minh rằng $DA = DB$.

Lời giải:



Cách 1:

Ta có $\triangle ABC$ cân ở A nên trung tuyến AM cũng là đường trung trực của BC .

Vì D thuộc đường trung trực của AC nên $DA = DC$ (1).

Vì D thuộc đường trung trực của BC nên $DB = DC$ (2).

Từ (1),(2) suy ra $DA = DB$.

Cách 2:

$\triangle ABC$ cân tại A có AM là đường trung tuyến của cạnh đáy BC nên AM cũng là đường trung trực của BC .

Ta lại có đường trung trực của AC cắt AM tại D

$\Rightarrow D$ là giao điểm của hai đường trung trực của cạnh BC và AC

$\Rightarrow D$ thuộc đường trung trực của AB .

Vậy $DA = DB$.

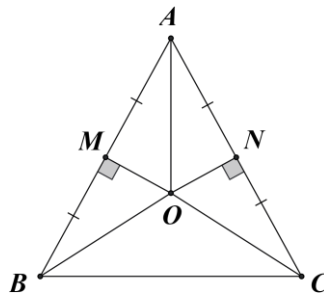
Bài 2. Cho tam giác cân ABC có $AB = AC$. Hai đường trung trực của hai cạnh $AB; AC$ cắt nhau tại O . Chứng minh: $\angle AOB = \angle AOC$.

Lời giải:

Vì điểm O là giao điểm các đường trung trực của $\triangle ABC$ nên O thuộc đường trung trực của BC .

$\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow AB = AC \Rightarrow A$ thuộc đường trung trực của BC .

Do đó AO là đường trung trực của BC .



$\triangle ABC$ cân tại A nên đường trung trực AO đồng thời là đường phân giác của A

Xét $\triangle AOB$ và $\triangle AOC$ có:

OA chung

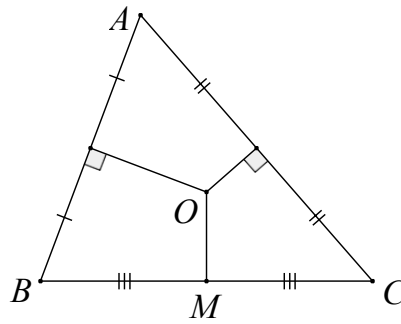
$AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân tại A)

$\angle OAB = \angle OAC$ (AO là tia phân giác của BAC)

Do đó, $\triangle AOB = \triangle AOC$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle AOB = \angle AOC$ (hai góc tương ứng)

Bài 3. Cho $\triangle ABC$, M là trung điểm của BC . Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O . Tính số đo góc OMB .

Lời giải:



Từ giả thiết suy ra O thuộc đường trung trực của BC .

$\Rightarrow OM$ là đường trung trực của BC .

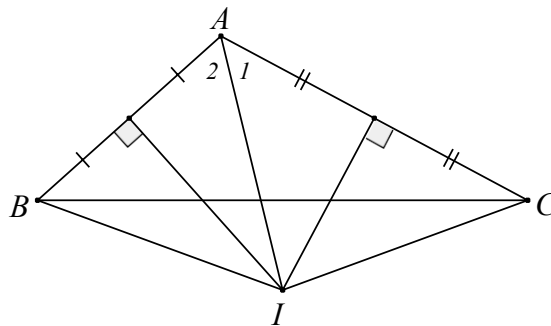
$\Rightarrow OMB = 90^\circ$.

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ có góc $A = 110^\circ$. Đường trung trực của các cạnh AB và AC cắt nhau tại I .

a) Chứng minh $\triangle BIC$ cân.

b) Chứng minh $BIC = 2(180^\circ - BAC)$ và tính số đo góc BIC .

Lời giải:



a) Từ giả thiết suy ra I thuộc đường trung trực của BC

$\Rightarrow IB = IC \Rightarrow \triangle BIC$ cân.

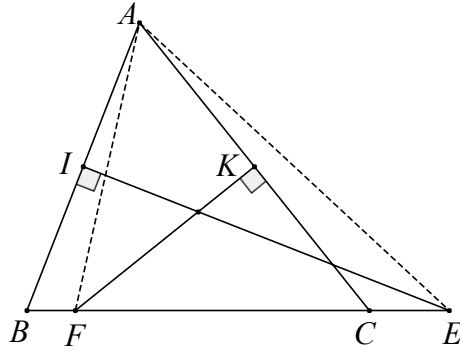
b) Có $BIA = 180^\circ - 2A_2$; $AIC = 180^\circ - 2A_1$.

$\Rightarrow BIC = BIA + AIC = 180^\circ - 2A_1 + 180^\circ - 2A_2 = 2(180^\circ - BAC)$.

Từ đó, suy ra $BIC = 140^\circ$.

Bài 5. Cho $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 60^\circ$. Các đường trung trực của cạnh AB và AC lần lượt cắt BC ở E và F . Tính EA .

Lời giải:



Trước hết, do E nằm trên đường trung trực của AB nên $\triangle EAB$ cân ở $E \Rightarrow BAE = ABE$.

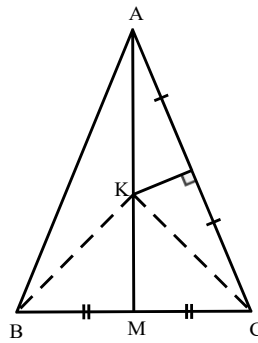
Tương tự, ta có $\triangle FAC$ cân ở $F \Rightarrow FAC = FCA$. Ta có $BCA = FCA = FAB + BAC$

$$\Rightarrow FAB = BCA - BAC$$

Khi đó $EAF = BAE + FAB = ABC + BCA - BAC \Rightarrow EAF = 180^\circ - 2BAC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Bài 6. Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Đường trung tuyến AM cắt đường trung trực của AC tại K . Chứng minh rằng $KA = KB = KC$.

Lời giải



$\triangle ABC$ cân tại A nên đường trung tuyến AM cũng là đường trung trực.

K là giao điểm các đường trung trực của BC, AC nên $KA = KB = KC$.

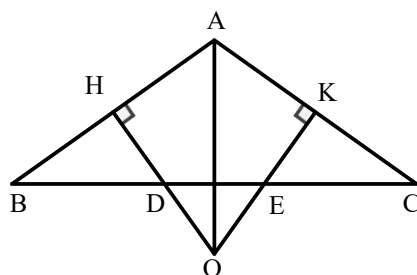
Bài 7. Cho $\triangle ABC$ cân tại A , $A > 90^\circ$. Các đường trung trực của AB và của AC cắt nhau tại O và cắt BC tại D và E . Chứng minh rằng:

a) OA là đường trung trực của BC .

b) $BC = CE$.

c) $\triangle ODE$ là tam giác cân.

Lời giải:



O là giao điểm các đường trung trực của $\triangle ABC \Rightarrow OB = OC$.

$\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow AB = AC$.

Vậy AO là đường trung trực của BC .

b) Gọi H là trung điểm của AB , K là trung điểm của AC .

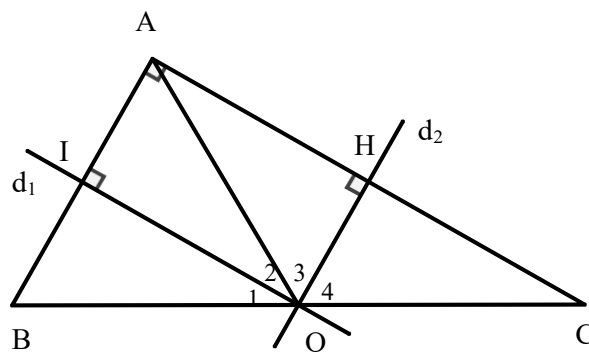
$\triangle HBD = \triangle KCE$ (g.c.g) $\Rightarrow BD = CE$.

c) $\triangle HBD = \triangle KCE \Rightarrow HBD = KEC$

$\Rightarrow ODE = OED \Rightarrow \triangle ODE$ cân tại O .

Bài 8. Chứng minh rằng các đường trung trực của tam giác vuông cắt nhau tại trung điểm của cạnh huyền.

Lời giải:



Xét $\triangle ABC$ vuông tại A .

Vẽ đường trung trực d_1 của cạnh AB , cắt AB tại I . vẽ đường trung trực d_2 của cạnh AC , cắt AC tại H

Giả sử d_1 và d_2 cắt nhau tại O . Ta có $OA = OB$, do đó $\triangle OAI = \triangle OBI$ (c.g.c)

Nên $O_1 = O_2$. Tương tự $O_3 = O_4$.

Ta có $OI \parallel AC$ mà $OH \perp AC$ nên $IOH = 90^\circ$.

Do đó $O_1 + O_2 + O_3 + O_4 = 2(O_2 + O_4) = 2IOH = 180^\circ$.

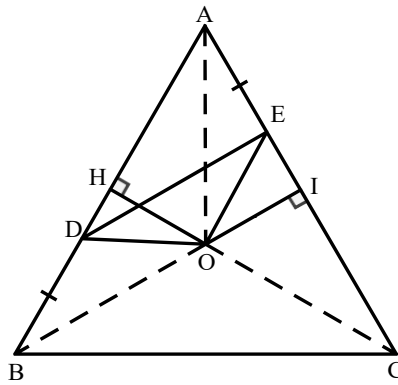
Vậy ba điểm B, O, C thẳng hàng.

Mặt khác, $OB = OC$ nên O thuộc đường trung trực của BC .

Vậy các đường trung trực của tam giác vuông cắt nhau tại trung điểm của cạnh huyền.

Bài 9. Cho tam giác đều ABC . Gọi D và E là hai điểm lần lượt trên hai cạnh AB và AC sao cho $BD = AE$. Chứng minh rằng các đường trung trực của đoạn thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định khi D và E di chuyển trên các cạnh AB và AC .

Lời giải:



Ta nhận thấy rằng:

Nếu D trùng với B thì E trùng với A , đường trung trực của DE là đường trung trực của AB .

Nếu D trùng với A thì E trùng với C , đường trung trực của DE là đường trung trực của AC .

Do đó, ta vẽ các đường trung trực của AB và cạnh AC , chúng ta cắt nhau tại O .

Ta sẽ chứng tỏ rằng đường trung trực của DE đi qua O bằng cách chứng minh $OD = OE$.

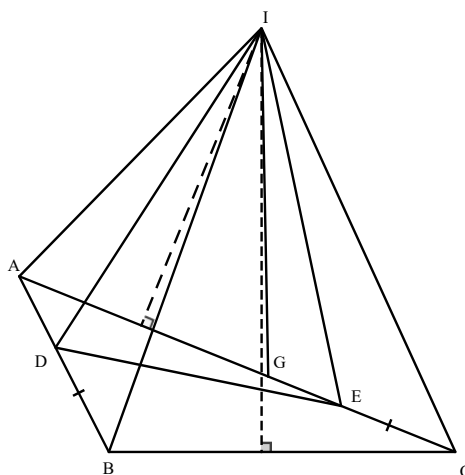
Gọi H và I theo thứ tự là trung điểm của AB và AC .

Từ đó suy ra $HD = IE$ rồi suy ra $\triangle OHD = \triangle OIE$ (c.g.c) để có $OD = OE$.

Hoặc chứng minh $OAE = OBD$ rồi suy ra $\triangle OAE = \triangle OBD$ (c.g.c) để có $OD = OE$.

Bài 10. Cho $\triangle ABC$, $AC > AB$. Hai điểm D và E theo thứ tự di chuyển trên các cạnh AB và AC sao cho $BD = CE$. Chứng minh rằng các đường trung trực của DE luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải:



Trên cạnh AC lấy điểm G với $CG = AB$ thì điểm G cố định.

Ta nhận thấy rằng:

Khi D trùng với B thì E trùng với C , đường trung trực của DE là đường trung trực của BC .

Khi D trùng với A thì E trùng với G , đường trung trực của DE là đường trung trực của AG .

Vẽ đường trung trực của BC và AG chúng cắt nhau tại I thì I là điểm cố định.

Vì vậy nếu các đường trung trực của DE đi qua một điểm cố định thì điểm cố định đó phải là điểm I nói trên.

Thật vậy, I thuộc các đường trung trực của BC và AG nên $IB = IC, IA = IG$.

$\triangle IAB = \triangle IGC$ (c.c.c), nên $ID = IE$.

Điều này chứng tỏ rằng đường trung trực của DE luôn đi qua điểm I cố định.

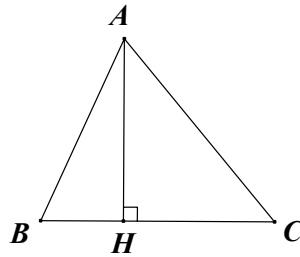
CHUYÊN DE :BA ĐƯỜNG CAO

Dạng 1. Xác định trục tâm của một tam giác

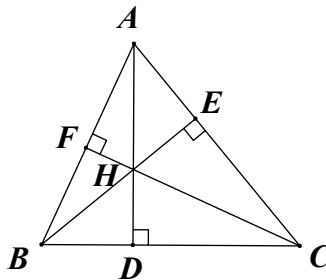
I. Phương pháp giải:

- Để xác định trục tâm của một tam giác, ta cần tìm giao điểm hai đường cao của tam giác đó
- Dựa vào định nghĩa, định lí và nhận xét, tính chất về đường cao và sự đồng quy của ba đường cao trong tam giác.

1. AH là một đường cao của $\triangle ABC \Leftrightarrow AH \perp BC$

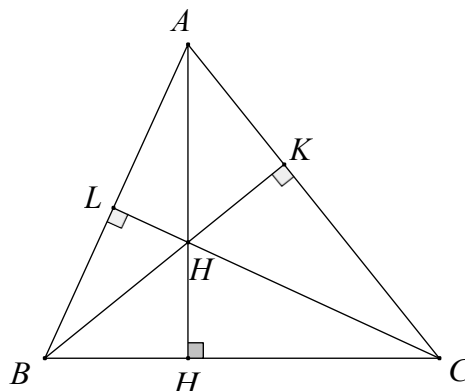


2. Trong hình vẽ AD, BE, CF là các đường cao, H là trục tâm của $\triangle ABC$.

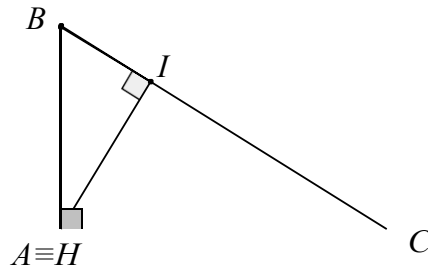


Chú ý:

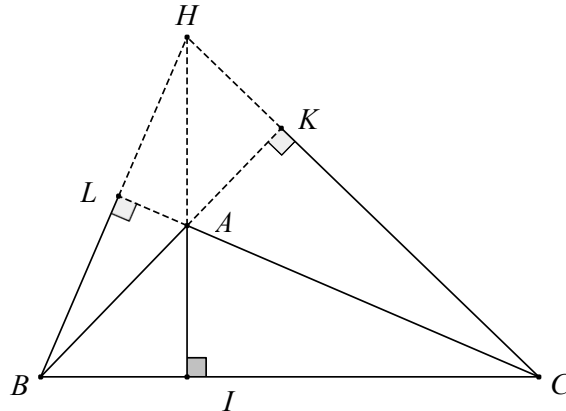
a) $\triangle ABC$ là tam giác nhọn thì H nằm trong tam giác.



b) $\triangle ABC$ là tam giác vuông tại A thì điểm H trùng với điểm A .



c) $\triangle ABC$ là tam giác tù thì điểm H nằm ngoài tam giác.



II. Bài toán.

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ có $\angle B = 90^\circ$, $AH \perp BC$. Em chọn phát biểu đúng:

- A. H là trực tâm của $\triangle ABC$
- B. A là trực tâm của $\triangle ABC$
- C. B là trực tâm của $\triangle ABC$
- D. C là trực tâm của $\triangle ABC$

Lời giải:

Vì $\triangle ABC$ có $\angle B = 90^\circ$ nên $\triangle ABC$ là tam giác vuông tại $B \Rightarrow B$ là trực tâm của $\triangle ABC$.

Đáp án đúng là C.

Bài 2. Cho $\triangle ABC$, hai đường cao AM và BN cắt nhau tại H . Em chọn phát biểu đúng:

- A. H là trọng tâm của $\triangle ABC$.
- B. $HA = \frac{2}{3}AM$ và $HB = \frac{2}{3}BN$
- C. H là trực tâm của $\triangle ABC$; CH là đường cao của $\triangle ABC$.
- D. CH là đường trung trực của $\triangle ABC$.

Lời giải:

$\triangle ABC$, hai đường cao AM và BN cắt nhau tại $H \Rightarrow CH$ là đường cao của $\triangle ABC \Rightarrow H$ là trực tâm của $\triangle ABC$.

Đáp án đúng là C.

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $AM \perp BC$ tại M . Chọn phát biểu đúng:

- A. AM là đường trung tuyến của $\triangle ABC$
- B. AM là đường trung trực của BC .
- C. AM là đường phân giác của BAC .
- D. Cả A, B, C đều đúng.

Lời giải:

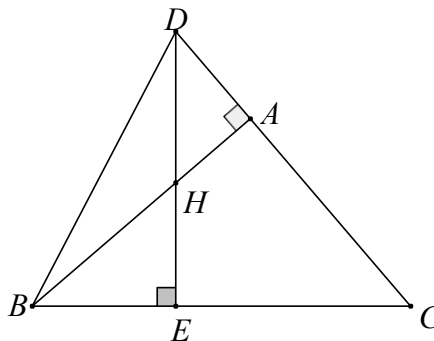
Vì $\triangle ABC$ cân tại A có $AM \perp BC$ nên AM là đường cao $\Rightarrow AM$ cũng là đường trung tuyến, đường trung trực và đường phân giác của $\triangle ABC$.

Chọn đáp án D

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Lấy H thuộc AB , vẽ $HE \perp BC$ ở E . Tia EH cắt tia CA tại D . Khi đó

- A. H là trọng tâm của $\triangle BCD$.
- B. H là trực tâm của $\triangle BCD$.
- C. H là giao ba đường trung trực của $\triangle BCD$.
- D. H là giao ba đường phân giác của $\triangle BCD$.

Lời giải:



Trong $\triangle BCD$ có:

$BA \perp CD$ tại A (do $\triangle ABC$ vuông tại A) $\Rightarrow BA$ là một đường cao của $\triangle BCD$

$DE \perp BC$ tại E (do $HE \perp BC$) $\Rightarrow DE$ là một đường cao của $\triangle BCD$

Mà DE giao BA tại H

Do đó H là giao điểm của hai đường cao trong $\triangle BCD$

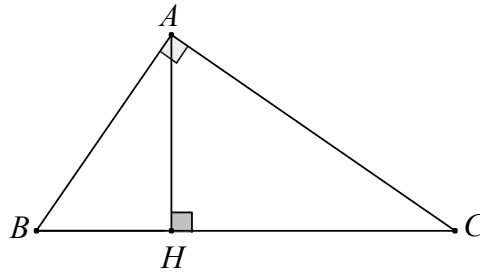
Suy ra H là giao điểm của ba đường cao trong $\triangle BCD$

Vậy H là trực tâm của $\triangle BCD$.

Chọn đáp án B

Bài 5. Cho tam giác $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Tìm trực tâm của các giác $\triangle ABC$, $\triangle AHB$, $\triangle AHC$.

Lời giải:

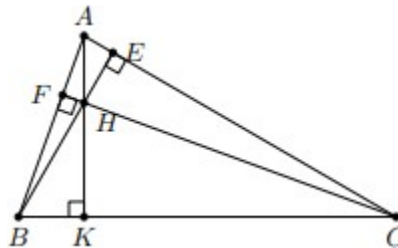


Tam giác $\triangle ABC$ có hai đường cao là BA và AH . Từ đó suy ra trực tâm của tam giác $\triangle ABC$ là A . Chứng minh tương tự ta có trực tâm của tam giác $\triangle AHB$, $\triangle AHC$ đều là điểm H .

Nhận xét: Trực tâm của tam giác vuông là đỉnh góc vuông của tam giác.

Bài 6. Cho H là trực tâm của tam giác ABC không vuông. Tìm trực tâm của các tam giác HBC, HAB, HAC

Lời giải



Gọi các đường cao tam giác là AK, BE, CF . Ta có:

$\triangle HBC$ có hai đường cao là HK, BF . Từ đó suy ra trực tâm của tam giác $\triangle HBC$ là A .

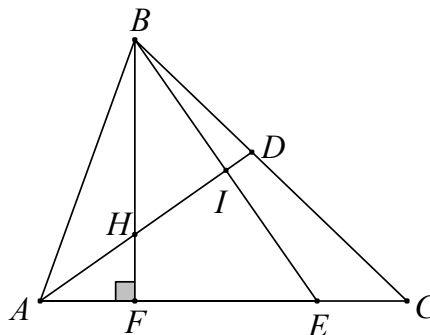
Chứng minh tương tự ta được trực tâm của tam giác $\triangle HAB, \triangle HAC$ lần lượt là C và B .

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ có $A = 70^\circ$, $AB < AC$, đường phân giác góc A cắt BC tại D , $BF \perp AC$ tại F , H là giao điểm của BF và AD , E thuộc AC sao cho $AE = AB$.

a) Xác định trực tâm của $\triangle ABE$.

b) Tính số đo $\angle DHF$.

Lời giải



a) Gọi AD giao BE tại I

Xét $\triangle ABE$ có $AE = AB$ (gt)

$\Rightarrow \triangle ABE$ cân tại A .

Lại có: AD là tia phân giác góc A của $\triangle ABC$ (gt)

$\Rightarrow AI \perp BE$ (tính chất của tam giác cân)

Mặt khác: $BF \perp AE$ và AD giao BE tại H nên H là trực tâm của $\triangle ABE$ (tính chất 3 đường cao trong tam giác).

b) Ta có: AD là tia phân giác của BAC (gt)

$$\Rightarrow HAF = \frac{1}{2}BAC = 35^\circ$$

Vì $\triangle AHF$ vuông tại F nên:

$$AHF = 90^\circ - HAF = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$$

Vì DHF và AHF là 2 góc kề bù nên:

$$DHF = 180^\circ - AHF = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$$

Dạng 2. Sử dụng tính chất trực tâm của tam giác để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, ba đường thẳng đồng quy

I. Phương pháp giải:

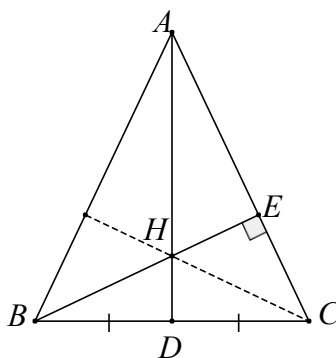
Nếu H là giao điểm hai đường cao kẻ từ B và C của tam giác ABC thì $AH \perp BC$.

Nếu ba đường thẳng là ba đường cao của một tam giác thì chúng cùng đi qua một điểm.

II. Bài toán.

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ cân tại A , đường cao BE cắt đường trung tuyến AD ở H . Chứng minh CH tạo với AB một góc 90° .

Lời giải



Xét $\triangle ABC$ cân tại A có: AD là đường trung tuyến (gt) $\Rightarrow AD$ cũng là đường trung cao.

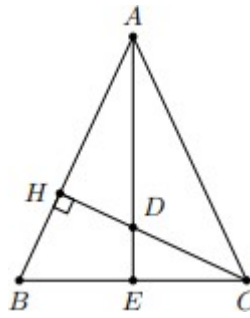
Lại có BE là đường cao mà BE cắt AD tại H

$\Rightarrow H$ là trực tâm của $\triangle ABC$

$\Rightarrow CH \perp AB$ hay CH tạo với AB một góc 90° .

Bài 2. Cho tam giác $\triangle ABC$ cân tại A . đường cao CH cắt tia phân giác của góc A tại D . Chứng minh rằng $BD \perp AC$.

Lời giải

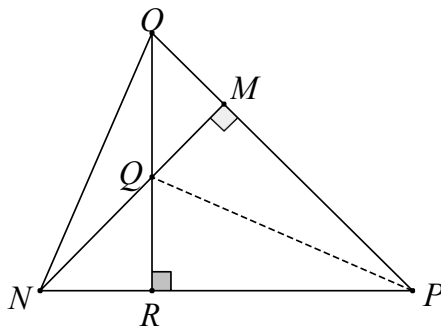


Kéo dài AD cắt BC tại E .

Từ giả thiết suy ra $AE \perp BC$. Do đó D là trực tâm của tam giác $\triangle ABC$. Vậy $BD \perp AC$.

Bài 3. Cho $\triangle MNP$ vuông tại M . Trên cạnh MN lấy điểm Q , kẻ $QR \perp NP$ ($R \in NP$). Gọi O là giao điểm của các đường thẳng PM và RQ . Chứng minh $PQ \perp ON$.

Lời giải:

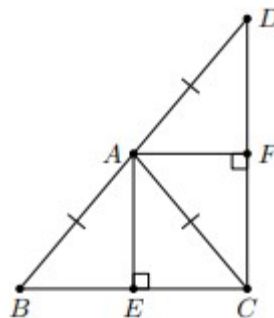


Ta có: $NM \perp PQ$, $OR \perp PN$

Mà NM giao OR tại $Q \Rightarrow Q$ là trực tâm của $\triangle PON \Rightarrow PQ \perp ON$.

Bài 4. Cho tam giác ABC cân tại A . Lấy điểm D sao cho A là trung điểm của BD . Kẻ đường cao AE của tam giác ABC , đường cao AF của tam giác ACD . Chứng minh rằng $AE \perp AF$.

Lời giải:



Xét tam giác cân ABC có AE là phân giác của BAC hay $BAE = EAC$.

đường cao, suy ra AE cũng là đường

Tương tự trong tam giác cân ACD ta có $CAF = FAD$. Từ đó ta được

$$EAF = EAC + CAF = \frac{1}{2}(BAC + CAD) = 90^\circ$$

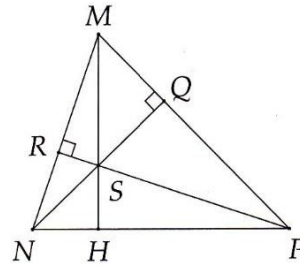
hay $AE \perp AF$.

Bài 5. Cho tam giác MNP có ba góc nhọn, các đường cao NQ, PR cắt nhau tại S .

a) Chứng minh $MS \perp NP$.

b) Cho $MNP = 65^\circ$. Tính SMR .

Lời giải:



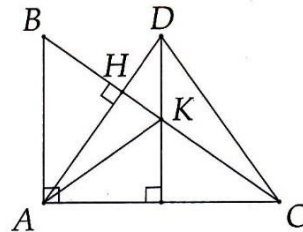
a) Vì S là trực tâm $\triangle MNP$, do đó $MS \perp NP$.

b) Gọi H là giao điểm của MS với NP .

Chú ý $\triangle MHN$ vuông, từ đó tính được $SMR = 25^\circ$

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A , kẻ đường cao AH . Lấy điểm K thuộc đoạn thẳng HC . Qua K kẻ đường thẳng song song với AB , cắt AH tại D . Chứng minh $AK \perp CD$.

Lời giải:



Vì $AB \perp AC$, do đó $DK \perp AC$.

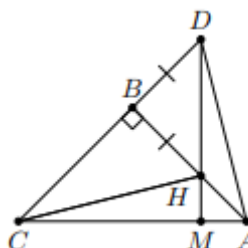
Bởi vậy K là trực tâm $\triangle ADC$, suy ra $AK \perp CD$.

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông cân tại B . Trên cạnh AB lấy điểm H . Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho $BH = BD$. Chứng minh

a) $DH \perp AC$.

b) $CH \perp AD$.

Lời giải:



a) Kéo dài DH cắt AC tại M .

Do $BH = BD$ và $DBA = 90^\circ$ nên tam giác DBH vuông cân tại B .

Suy ra $MDC = C = 45^\circ \Rightarrow MDC + C = 90^\circ \Rightarrow MDC = 90^\circ \Rightarrow DH \perp AC$

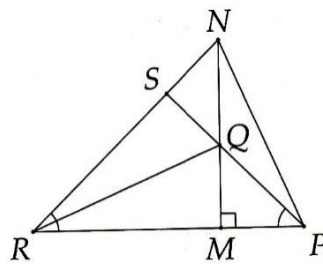
b) $\triangle ADC$ có hai đường cao AB và DM cắt nhau tại H nên H là trực tâm của tam giác đó. Do vậy, $CH \perp AD$.

Bài 8. Cho tam giác MNP vuông tại M ($MP < MN$). Trên cạnh MN lấy điểm Q sao cho $MQ = MP$, trên tia đối của tia MP lấy điểm R sao cho $MR = MN$. Chứng minh:

a) $PQ \perp NR$.

b) $RQ \perp NP$.

Lời giải:



a) Gọi S là giao điểm của PQ và NR . Tính được $SPR = SRP = 45^\circ$, từ đó $PQ \perp NR$.

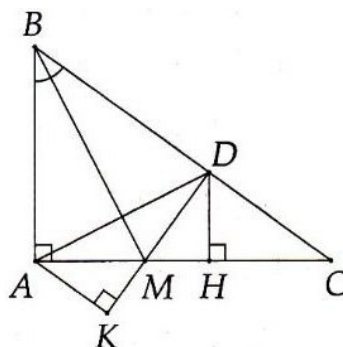
b) Từ kết quả ý a, ta có Q là trực tâm $\triangle PNR \Rightarrow RQ \perp NP$

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A , kẻ đường phân giác BM . Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = BA$.

a) Chứng minh $BM \perp AD$.

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên AC , K là hình chiếu vuông góc của A trên DM . Chứng minh ba đường thẳng AK, BM, DH đồng quy.

Lời giải:



a) Chú ý tam giác ABD cân tại B nên BM là đường phân giác cũng là đường cao, từ đó $BM \perp AD$.

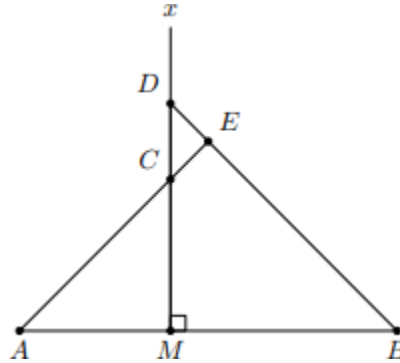
b) Chú ý AK, BM, DH là ba đường cao của $\triangle AMD$.

Bài 10. Đoạn thẳng AB và điểm M nằm giữa A và B ($MA < MB$). Vẽ tia đó lấy hai điểm C và D sao cho $MA = MC, MD = MB$. Tia AC vuông cắt BD tại E . Chứng minh:

a) $AE \perp BD$

b) C là trực tâm của tam giác ABD

Lời giải:



a) Do tia AC cắt BD tại E nên hai điểm C và D nằm cùng phía với AB .

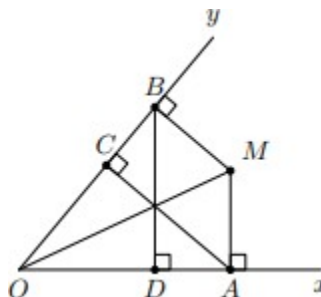
Do $MA = MC$ và $\angle AMC = 90^\circ$ nên tam giác AMC vuông cân tại M . Tương tự ta có $\triangle BMD$ vuông cân tại M .

Từ đó suy ra $\angle EDC = \angle DCE = 45^\circ \Rightarrow \angle CED = 90^\circ \Rightarrow AC \perp BD$.

b) Trong tam giác ABD , hai đường cao AE và DM cắt nhau nên C là trực tâm của tam giác ABD .

Bài 11. Cho góc nhọn xOy . Trên tia Ox lấy điểm A , trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OA = OB$. Kẻ $AC \perp Oy, BD \perp Ox$ ($C \in Oy, D \in Ox$). Đường thẳng vuông góc với Ox tại A và đường thẳng vuông góc với Oy tại B cắt nhau tại M . Chứng minh: OM, AC, BD đồng quy.

Lời giải:



Xét hai tam giác vuông $\triangle AOM$ và $\triangle BOM$ có:

OM là cạnh chung.

$OA = OB$ (giả thiết)

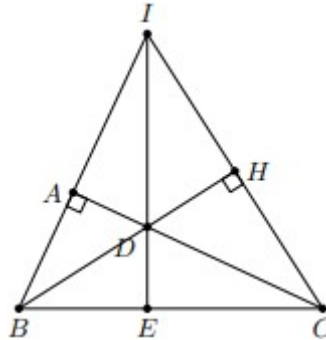
Suy ra $\triangle AOM = \triangle BOM$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông). Do đó, $\angle AOM = \angle BOM$.

Vậy OM là tia phân giác của tam giác cân $\triangle AOB$. Suy ra OM là đường cao hay $OM \perp AB$.

Xét trong tam giác AOB có ba đường cao OM, AC, BD do đó OM, AC, BD đồng quy.

Bài 12. Cho tam giác ABC vuông tại A có BD là đường phân giác. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BA = BE$. Vẽ $CH \perp DB$. Chứng minh rằng BA, DE, CH đồng quy.

Lời giải:



Gọi I là giao điểm của CH và AB . Ta có D là trực tâm của tam giác IBC suy ra $ID \perp BC$ (1)

Xét $\triangle BAD$ và $\triangle BED$ có:

$$AB = BE \text{ (gt);}$$

$$\angle ABD = \angle EBD \text{ (} BD \text{ là đường phân giác)}$$

BD : cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle BAD = \triangle BED \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \angle BED = \angle BAD = 90^\circ \text{ (hai góc tương ứng)}$$

$$\Rightarrow DE \perp BC \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra I, D, E thẳng hàng hay BA, DE, CH đồng quy.

Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường cao trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

I. Phương pháp giải:

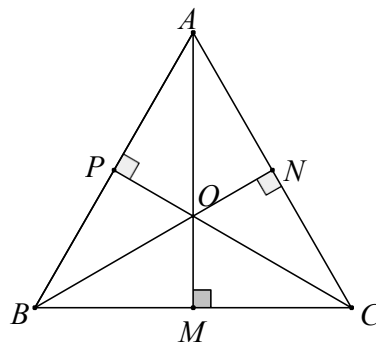
Dựa vào định lí, tính chất về sự đồng quy của ba đường cao trong tam giác.

II. Bài toán.

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ đều. Ba đường cao AM, BN, CP cắt nhau tại O . Chứng minh rằng:

- a) $OA = OB = OC$.
- b) O là trọng tâm của $\triangle ABC$
- c) $AM = BN = CP$

Lời giải:



a) Vì $\triangle ABC$ đều nên $\triangle ABC$ cân ở cả 3 đỉnh nên ba đường cao AM, BN, CP đồng thời là ba đường trung trực, ba đường trung tuyến của tam giác.

Vì AM, BN, CP là ba đường trung trực nên $OA = OB = OC$ (1)

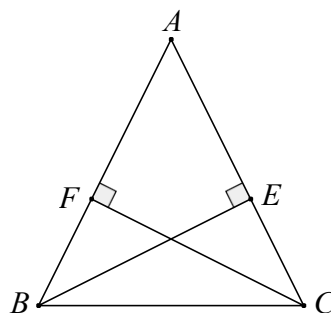
b) Vì AM, BN, CP là ba đường trung tuyến nên O là trọng tâm của $\triangle ABC$

c) Vì O là trọng tâm của $\triangle ABC$ suy ra $OA = \frac{2}{3} AM, OB = \frac{2}{3} BN, OC = \frac{2}{3} CP$ (2)

Từ (1) (2) suy ra $AM = BN = CP$

Bài 2. Chứng minh rằng một tam giác có hai đường cao (xuất phát từ các đỉnh của hai góc nhọn) bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

Lời giải



Xét $\triangle ABC$ có hai đường cao BE, CF và $BE = CF$

Xét hai tam giác vuông $\triangle CBF$ và $\triangle BCE$ có:

BC là cạnh chung.

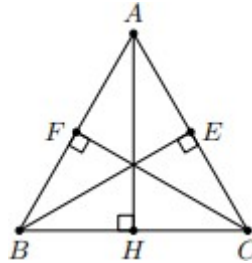
$BE = CF$ (giả thiết)

Suy ra $\triangle CBF = \triangle CBE$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông).

Từ đó suy ra $CBF = BCE$. Hay $\triangle ABC$ cân tại A .

Bài 3. Chứng minh rằng một tam giác có ba đường cao bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.

Lời giải



Xét tam giác $\triangle ABC$ có hai đường cao AH, BE, CF và $AH = BE = CF$

Xét hai tam giác vuông $\triangle CBF$ và $\triangle CBE$ có

BC là cạnh chung.

$BE = CF$ (giả thiết)

Suy ra $\triangle CBF = \triangle CBE$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông).

Suy ra $CBF = BCE$ (1)

Xét hai tam giác vuông $\triangle ABH$ và $\triangle BAE$ có

AB là cạnh chung.

$AH = BE$ (giả thiết).

Suy ra $\triangle ABH = \triangle BAE$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông).

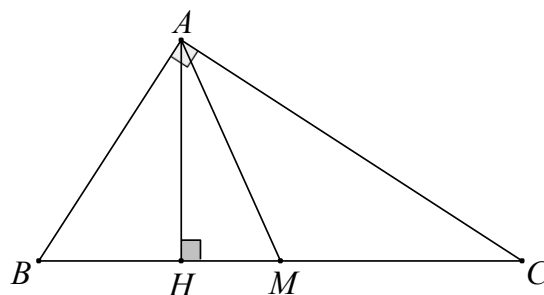
Suy ra $ABH = BAE$ (hai cạnh tương ứng) (2)

Từ (1) (2) suy ra $CBF = BCE = BAE$

Vậy $\triangle ABC$ có ba góc bằng nhau nên $\triangle ABC$ là tam giác đều.

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , kẻ đường cao AH và trung tuyến AM . Chứng minh trực tâm của $\triangle ABC$, $\triangle MAB$ và $\triangle MAC$ thẳng hàng.

Lời giải



Vì AH là đường cao của $\triangle ABC$ nên trực tâm của $\triangle ABC$ thuộc đường thẳng AH (1)

Có: AH là đường cao của $\triangle ABC$

$$\Rightarrow AH \perp BC \Rightarrow AH \perp BM, AH \perp CM$$

Xét $\triangle ABM$ có $AH \perp BM$

$\Rightarrow$ Trục tâm của $\triangle ABM$ thuộc đường thẳng AH (2)

Xét $\triangle ACM$ có $AH \perp CM$

$\Rightarrow$ Trục tâm của $\triangle ACM$ thuộc đường thẳng AH (3)

Từ (1);(2);(3) $\Rightarrow$ Trục tâm của $\triangle ABC$; $\triangle ABM$; $\triangle ACM$ thẳng hàng

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A . Đường cao AH . Lấy I là trung điểm của AC .

a) Chứng minh I là giao điểm của 3 đường trung trực $\triangle AHC$

b) Gọi K và D lần lượt là trung điểm của AH và HC . Chứng minh $KD \parallel AC$.

c) Chứng minh $BK \perp AD$.

Lời giải

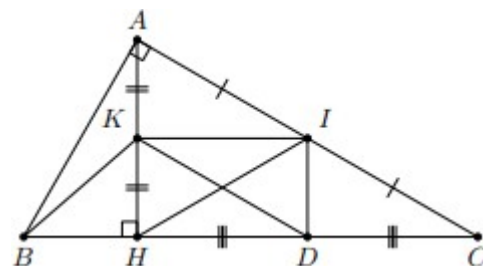
a) Ta có HI là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AC của tam giác vuông AHC nên $IH = IA = IC = \frac{AC}{2}$.
Do đó, I là giao điểm của ba đường trung trực của $\triangle AHC$.

b) Do I là giao điểm của ba đường trung trực của $\triangle AHC$ nên $ID \perp HC$, suy ra $ID \parallel AH$. Tương tự ta có $IK \parallel HC$.

Từ đó ta chứng minh được $\triangle HKI = \triangle IDC$ (c.g.c). Suy ra $KH = ID, KI = HD$.

Ta chứng minh được $\triangle KHD = \triangle IDC$ (c.g.c). Suy ra $KDH = ICD$, do đó $KD \parallel AC$.

c) Do $KD \parallel AC$ nên $KD \perp AB$. Trong $\triangle ABD$, hai đường cao KD và AH cắt nhau tại K nên K là trục tâm của tam giác. Do đó $BK \perp AD$.



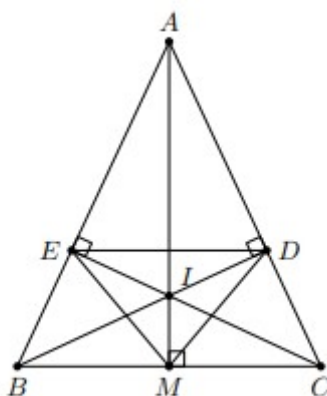
Bài 6. Cho tam giác ABC cân tại A , hai đường cao BD và CE cắt nhau tại I ($D \in AC, E \in AB$). Tia AI cắt BC tại M . Chứng minh

a) M là trung điểm của BC .

b) Tam giác MED là tam giác

cân.

Lời giải



a) Hai đường cao BC và CE cắt nhau tại I nên I là trực tâm của tam giác $\triangle ABC$. Do đó $AI \perp BC$.

Hơn nữa, do tam giác ABC cân tại A nên đường cao AI cũng đồng thời là đường trung tuyến. Do đó, M là trung điểm của BC .

b) Trong tam giác vuông BEC , do EM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC nên $EM = \frac{1}{2}BC$. Tương tự, $DM = \frac{1}{2}BC$. Do đó $EM = DM$, suy ra $\triangle MED$ là tam giác cân tại M .

Bài 7. Cho tam giác ABC cân tại A , đường trung tuyến AM và đường phân giác BD cắt nhau tại K . Gọi E là giao điểm của CK và AB . Chứng minh $BD = CE$.

Lời giải

$\triangle ABC$ cân tại A nên đường trung tuyến AM cũng đồng thời là đường phân giác.

Hai đường phân giác AM và BD cắt nhau tại K . Do đó, CK là đường phân giác thứ ba của tam giác $\triangle ABC$.

$\triangle ABC$ cân tại A nên $B = C$.

Mà $\angle DBC = \frac{1}{2}B$ (BD là đường phân giác)

$\angle ECB = \frac{1}{2}C$ (CK là đường phân giác)

$$\Rightarrow \angle DBC = \angle ECB$$

Xét hai tam giác $\triangle BDC$ và $\triangle ECB$ có

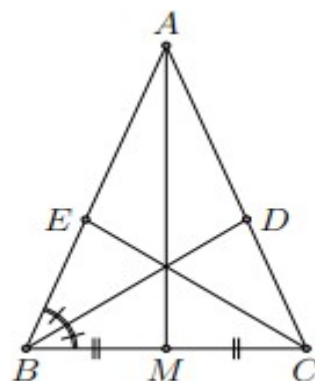
$\angle DBC = \angle ECB$ (chứng minh trên)

BC : cạnh chung

$\angle ECB = \angle DCB$ ($\triangle ABC$ cân tại A)

Suy ra $\triangle BDC = \triangle ECB$ (g.c.g)

Do đó, $BD = CE$ (hai cạnh tương ứng)

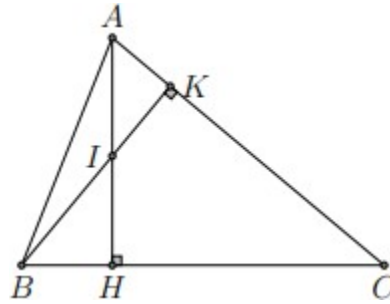


Bài 8. Cho tam giác ABC . Hai đường cao AH, BK cắt nhau tại I .

a) Chứng minh rằng $CI \perp AB$.

b) Khi $\angle ACH = 50^\circ$, hãy tính các góc $\angle BIH, \angle HIK$.

Lời giải



a) Ta có I là trực tâm của tam giác chắt đồng quy của ba đường cao, suy ra $CI \perp AB$.

b) Vì tam giác BKC vuông tại K nên $KBC = 90^\circ - ACB = 40^\circ$.

Mà tam giác BIH vuông tại H nên

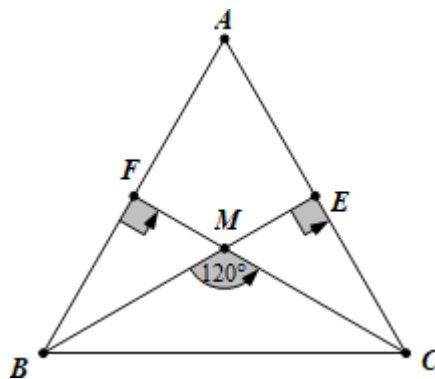
$$BIH = 90^\circ - KBC \Rightarrow BIH = 40^\circ.$$

Vì hai góc HIK và BIH kề bù nên ta $HIK = 180^\circ - BIH$.

Từ đó tính được $HIK = 140^\circ$.

Bài 9. Cho tam giác ABC cân tại A . Hai đường cao xuất phát từ đỉnh B và đỉnh C cắt nhau tại M . Biết góc $BMC = 120^\circ$, tính các góc của tam giác ABC .

Lời giải



Gọi E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ đỉnh B, C của tam giác ABC . Ta có $BMC = 120^\circ$ nên góc $CME = 60^\circ$.

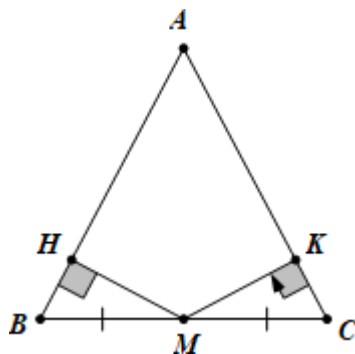
Vì tam giác CME vuông tại E nên $MCA + CME = 90^\circ$.

Mặt khác tam giác AFC vuông tại F nên ta có $BAC + ACF = 90^\circ$. Suy ra $BAC = CME = 60^\circ$.

Vì tam giác ABC cân tại A nên $AB = AC$.

Bài 10. Cho tam giác ABC cân tại A , M là trung điểm của BC . Gọi H và K lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB và AC . Chứng minh $MH = MK$.

Lời giải



Tam giác ABC cân tại A nên AM đồng thời là đường trung tuyến và đường phân giác.

Lại có $MH \perp AB, MK \perp AC$ nên theo tính chất đường phân giác của một góc, có $MH = MK$.

Phần III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC

Dạng 1. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác

Bài 1. Cho ΔABC cân tại A , đường trung tuyến AM . Đường trung trực của AB cắt AM ở O . Chứng minh rằng điểm O cách đều ba đỉnh của ΔABC .

Bài 2. Cho ΔABC cân tại A , O là giao điểm của ba đường trung trực. Lấy điểm D trên cạnh AB , điểm E trên cạnh AC sao cho $AD = CE$. Chứng minh rằng

a) $OA = OB = OC$.

b) Điểm O nằm trên đường trung trực của DE .

Bài 3. Nhà bạn Nam có một mảnh vườn nhỏ trồng hoa và cỏ nhậu. Bố của bạn Nam nhờ Nam chọn vị trí để đặt vòi xoay phun tưới cây tự động sao cho vị trí đó cách đều ba khóm hoa ở ba góc vườn nhưng Nam lại chưa biết tìm như thế nào. Các em hãy giúp bạn Nam giải quyết vấn đề này nhé.

Bài 4. Ông Hùng có ba cửa hàng A, B, C không nằm trên một đường thẳng và đang muốn tìm địa điểm O để làm kho hàng. Phải chọn vị trí của kho hàng ở đâu để khoảng cách từ kho đến các cửa hàng bằng nhau?

Dạng 2. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy, ba điểm thẳng hàng

Bài 5. Cho tam giác ABC cân ở A , đường phân giác AK . Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O .

a) Chứng minh rằng ba điểm A, K, O thẳng hàng.

b) Kéo dài CO cắt AB ở D , kéo dài BO cắt AC ở E . Chứng minh rằng AK và các đường trung trực của AD và AE đồng quy.

Bài 6. Cho $\angle xOy = 90^\circ$ và điểm P nằm trong góc đó. Trên mặt phẳng đó lấy điểm A sao cho Ox là đường trung trực của đoạn thẳng PA và điểm B sao cho Oy là đường trung trực của đoạn thẳng PB .

a) Chứng minh ba điểm O, A, B thẳng hàng.

b) Chứng minh O là giao điểm của ba đường trung trực của $\triangle ABP$ từ đó suy ra $\triangle ABP$ vuông.

Bài 7. Cho tam giác MNP cân ở M , đường cao MH . Các đường trung trực của MN và MP cắt nhau ở D . Chứng minh ba điểm M, D, H thẳng hàng.

Bài 8. Cho tam giác ABC cân có A là góc tù. Gọi M là trung điểm của BC . N nằm trong tam giác ABC sao cho tam giác BNC cân tại N . Chứng minh đường thẳng AM và các đường trung trực của NB, NC đồng quy.

Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường trung trực trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

Bài 9. Cho $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 110^\circ$. Các đường trung trực của cạnh AB và AC lần lượt cắt BC ở E và F . Tính $\angle EAF$.

Bài 10. Cho $\triangle ABC$ cân tại A , $A > 90^\circ$. Các đường trung trực của AB và của AC cắt nhau tại O và cắt BC tại D và E .

Chứng minh rằng:

a) OA là đường trung trực của BC .

b) $BD = CE$.

c) $\triangle ODE$ là tam giác cân.

Bài 11. Cho M là giao điểm 3 đường trung trực của tam giác ABC . Chứng minh rằng nếu M nằm trên một cạnh của tam giác ABC thì ABC là một tam giác vuông.

Bài 12. Cho $\triangle ABC$, đường phân giác AI ($I \in BC$). Trên đoạn thẳng IC lấy điểm H , từ H kẻ đường thẳng song song với AI cắt AB kéo dài tại E và cắt AC tại F . Chứng minh rằng:

a) Đường trung trực của đoạn thẳng EF đi qua đỉnh A của $\triangle ABC$.

b) Đường trung trực của đoạn thẳng EF vuông góc với AI .

c) Khi H di động trên tia IC của $\triangle ABC$ cố định thì đường trung trực của đoạn thẳng EF cố định.

Bài 13. Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn. Các điểm F, K, I lần lượt là trung điểm các cạnh BC, BA, AC . Gọi H là giao điểm các đường trung trực $\triangle ABC$. Trên tia đối của tia FH lấy

điểm A_1 sao cho $A_1F = FH$. Trên tia đối của tia KH lấy điểm C_1 sao cho $KH = KC_1$. Trên tia đối của tia IH lấy điểm B_1 sao cho $IH = IB_1$.

a) Chứng minh rằng hình lục giác $AC_1BA_1CB_1$ có 6 cạnh bằng nhau và 2 trong 6 cạnh đó đôi một song song.

b) Chứng minh rằng: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

BA ĐƯỜNG CAO

Dạng 1. Xác định trực tâm của một tam giác

Bài 14. Cho ΔABC , các đường cao AK, BN, CM . Điểm H là trực tâm của tam giác. Tìm trực tâm của ΔBHC , ΔAHC , ΔAHB .

Bài 15. Cho tam giác ABC , hai đường cao BD và CE . Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh M thuộc trung trực của DE .

Bài 16. Đoạn thẳng AB và điểm M nằm giữa A và B ($MA < MB$). Vẽ tia Mx vuông AB lấy hai điểm C và D sao cho $MA = MC, MD = MB$. Tia AC vuông cắt BD tại E . Chứng minh

1. $AE \perp BD$

2. C là trực tâm của tam giác ΔABD .

Dạng 2. Sử dụng tính chất trực tâm của tam giác để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, ba đường thẳng đồng quy

Bài 17. Cho tam giác LMN nhọn và điểm S nằm trong tam giác. Gọi LS cắt MN tại P , MS cắt LN tại Q . Chứng minh rằng nếu LP vuông góc với MN và MQ vuông góc với LN thì NS vuông góc với ML .

Bài 18. Cho ΔMNP cân tại M , đường cao PQ cắt đường phân giác MS ở K . Chứng minh $NK \perp MP$

Bài 19. Cho ΔABC vuông tại A , kẻ đường cao AH . Lấy điểm K thuộc đoạn thẳng HC . Qua K kẻ đường thẳng song song với AB , cắt AH tại D . Chứng minh $AK \perp CD$.

Bài 20. Cho ΔMNP vuông tại M ($MP < MN$). Trên cạnh MN lấy điểm Q sao cho $MQ = MP$, trên tia đối của tia MP lấy điểm R sao cho $MR = MN$. Chứng minh:

a) $PQ \perp NR$.

b) $RQ \perp NP$.

Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường cao trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

Bài 21. Cho ΔMNP có ba góc nhọn, các đường cao NQ, PR cắt nhau tại S .

a) Chứng minh $MS \perp NP$.

b) Cho $MNP = 65^\circ$. Tính SMR .

Bài 22. Cho ΔABC vuông tại A , kẻ đường phân giác BM . Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = BA$.

a) Chứng minh $BM \perp AD$.

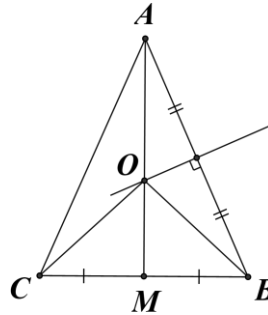
b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên AC , K là hình chiếu vuông góc của A trên DM . Chứng minh ba đường thẳng AK, BM, DH đồng quy.

ĐÁP SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC

Dạng 1. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác

Bài 1.

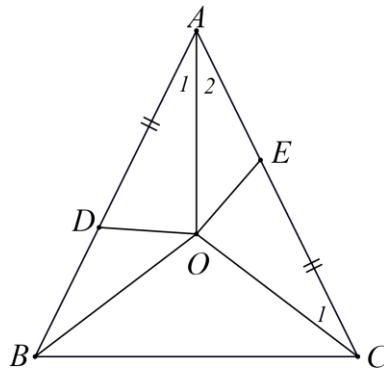


$\triangle ABC$ cân tại A có AM là đường trung tuyến của cạnh đáy BC nên AM cũng là đường trung trực của BC .

Vì đường trung trực của AB cắt AM ở O nên O là giao điểm của ba đường trung trực của $\triangle ABC$.

Vậy O cách đều ba đỉnh của $\triangle ABC$.

Bài 2.



a) Điểm O là giao điểm 3 đường trung trực của $\triangle ABC$ nên $OA = OB = OC$.

b) Ta có $OA = OC$ nên $\triangle AOC$ cân tại $O \Rightarrow A_2 = C_1$ (1)

$\triangle ABC$ cân tại A , AO là đường trung trực nên AO là đường phân giác của BAC

$$\Rightarrow A_1 = A_2 \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A_1 = C_1 (= A_1)$

Xét $\triangle OAD$ và $\triangle OCE$ có:

$$AD = CE \text{ (gt)}$$

$$A_1 = C_1 \text{ (cmt)}$$

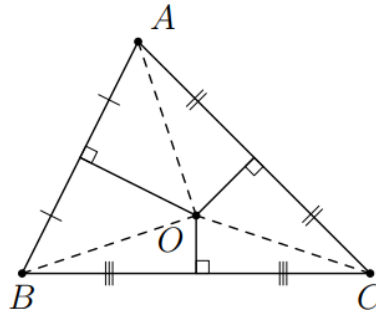
$$OA = OC$$

Do đó, $\triangle OAD = \triangle OCE$ (c.g.c)

$\Rightarrow OD = OE$ (hai cạnh tương ứng)

Vậy O nằm trên đường trung trực DE .

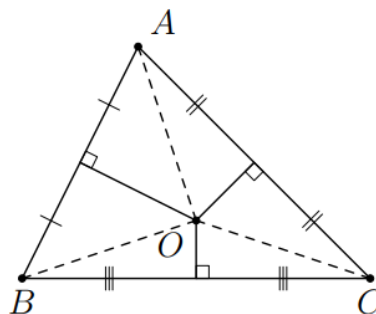
Bài 3.



Gọi vị trí ba khóm hoa đó lần lượt là A, B, C và vị trí cần đặt vòi xoay phun tưới cây tự động là O thì điểm O cách đều ba điểm A, B, C . Do đó O là giao của ba đường trung trực của tam giác ABC hay O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Để xác định vị trí điểm O ta chỉ cần xác định giao điểm của hai trong ba đường trung trực của tam giác ABC .

Bài 4.

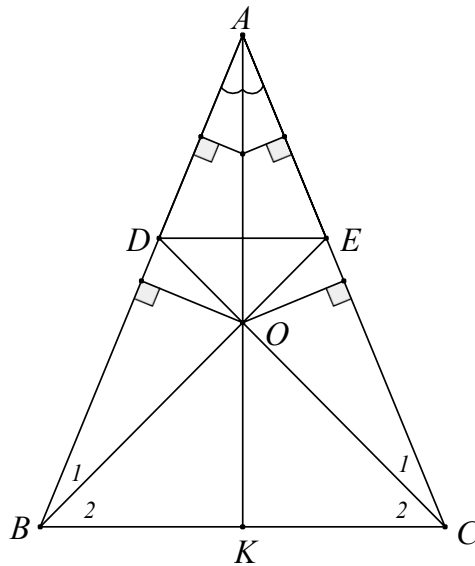


Vì điểm O cách đều ba điểm A, B, C nên O là giao của ba đường trung trực của tam giác ABC hay O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Để xác định vị trí điểm O ta chỉ cần xác định giao điểm của hai trong ba đường trung trực của tam giác ABC .

Dạng 2. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy, ba điểm thẳng hàng

Bài 5.



a) Ta có $\triangle ABD = \triangle ACD$ (c.g.c). Từ đó suy ra AD là đường trung trực của BC .

Xét $\triangle ABC$, theo tính chất ba đường trung trực của tam giác nên O thuộc đường trung trực của BC .

Vậy ba điểm A, D, O thẳng hàng.

b) Ta có $ABC = ACB$, $B_2 = B_1 \Rightarrow B_1 = C_1$.

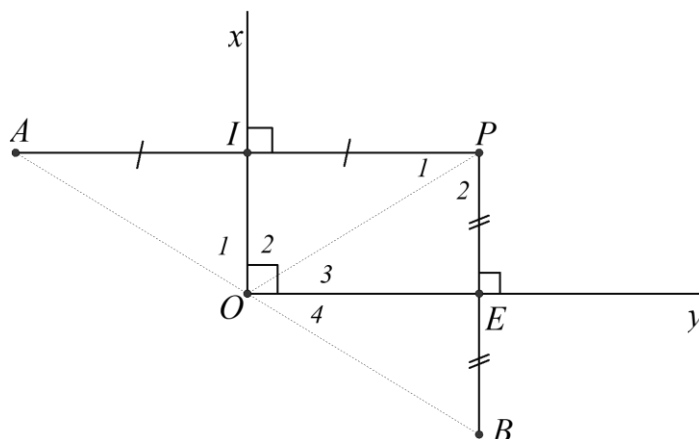
Chứng minh $\triangle ADC = \triangle AEB$ (g.c.g), suy ra $AD = AE$ (1).

Mặt khác, có $OB = OC$, $BE = CD$ (vì $\triangle ADC = \triangle AEB$) nên $OD = OE$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra AK là đường trung trực của BC .

Xét $\triangle ADE$, theo tính chất ba đường trung trực của tam giác suy ra AK và các đường trung trực của AD và AE đồng quy.

Bài 6.



a) Xét $\triangle AOP$ có: Ox là đường trung trực của PA nên $OA = OP, IA = IP$

Xét hai tam giác vuông $\triangle OAI$ và $\triangle OPI$ có: $OA = OP, IA = IP$

$$\Rightarrow \Delta OAI = \Delta OPI \text{ (ch-cgv)} \Rightarrow O_1 = O_2 \quad (1)$$

Xét $\triangle BOP$ có: Oy là đường trung trực của PB nên $OB = OP, EB = EP$

Xét hai tam giác vuông $\triangle OBE$ và $\triangle OPE$ có: $OB = OP, EB = EP$

$$\Rightarrow \triangle OBE = \triangle OPE \text{ (ch-cgv)} \Rightarrow O_3 = O_4 \quad (2)$$

Từ (1)(2) suy ra $O_1 + O_4 = O_2 + O_3 = 90^\circ$

$$\Rightarrow \angle AOB = O_1 + O_4 + O_2 + O_3 = 2(O_2 + O_3) = 180^\circ$$

Suy ra ba điểm O, A, B thẳng hàng.

b) Ta có $OA = OP$ và $OB = OP$ theo chứng minh câu a.

$$\Rightarrow OA = OB (= OP)$$

$\Rightarrow O$ nằm trên đường trung trực của AB .

Xét $\triangle ABP$ có:

Ox là đường trung trực của PA

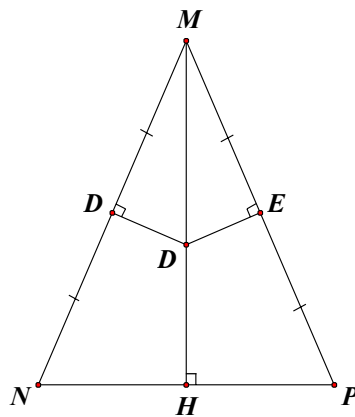
Oy là đường trung trực của PB

O nằm trên đường trung trực của AB

Suy ra O là giao điểm của ba đường trung trực của $\triangle ABP$

Mà O nằm trên cạnh AB của $\triangle ABP$ nên $\triangle ABP$ là tam giác vuông (Theo chứng minh Bài 1 mục III của chuyên đề này)

Bài 7.



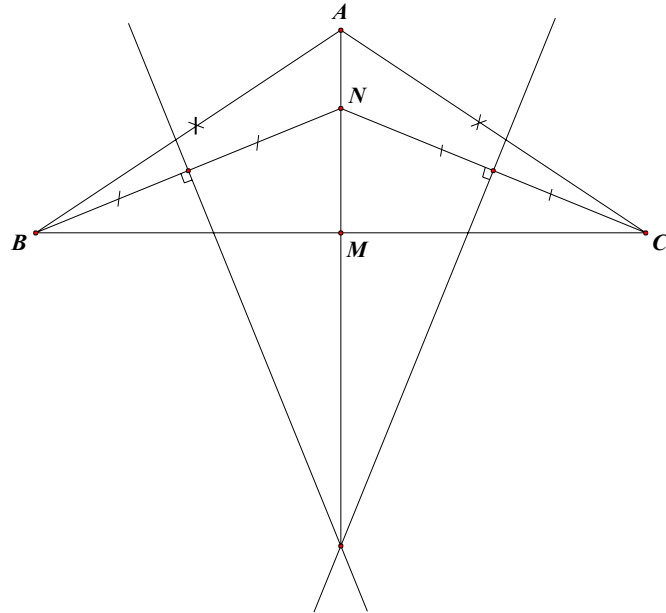
Chứng minh được: $\triangle MNH = \triangle MPH$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông).

Từ đó, suy ra MH là đường trung trực của NP .

Theo tính chất ba đường trung trực của tam giác, ta suy ra điểm D thuộc đường trung trực của NP .

Vậy ba điểm M, D, H thẳng hàng.

Bài 8.



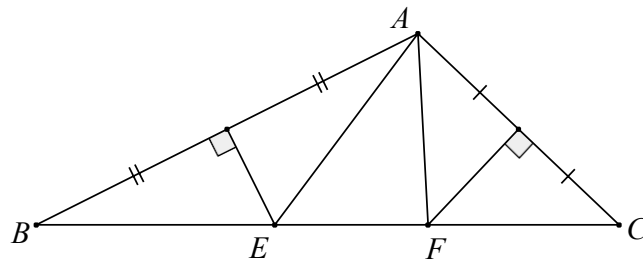
Từ giả thiết, ta có: $AB = AC, NB = NC$.

$\Rightarrow AN$ là đường trung trực của BC hay A, N, M thẳng hàng.

Xét $\triangle NBC$, theo tính chất ba đường trung trực trong tam giác ta có các đường trung trực của NB và NC đồng quy với đường thẳng AM .

Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường trung trực trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

Bài 9.

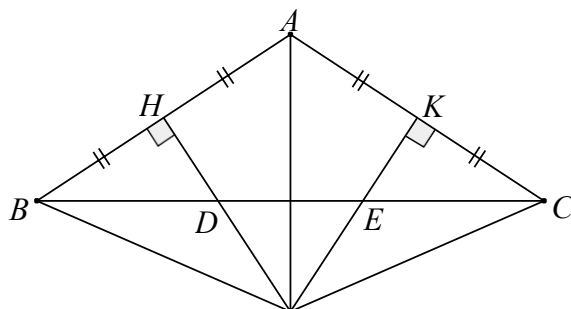


Ta có E nằm trên đường trung trực của AB nên $\triangle EAB$ cân ở $E \Rightarrow EAB = EBA$.

Tương tự F nằm trên đường trung trực của AC nên $\triangle FAC$ cân ở $F \Rightarrow FAC = FCA$

Ta có $EAF = BAC - BAE - CAF = BAC - EBA - FCA = 110^\circ - 70^\circ = 40^\circ$

Bài 10.



a) Vì điểm O là giao điểm các đường trung trực của $\triangle ABC$ nên O thuộc đường trung trực của BC .

$\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow AB = AC \Rightarrow A$ thuộc đường trung trực của BC .

Vậy AO là đường trung trực của BC .

b) Gọi H là trung điểm của AB , K là trung điểm của AC .

Xét $\triangle HBD$ và $\triangle KCE$ có:

$$\angle BHD = \angle CKD = 90^\circ$$

$$BH = CK$$

$$\angle ABC = \angle ACB \text{ (} \triangle ABC \text{ cân tại } A \text{)}$$

Do đó, $\triangle HBD = \triangle KCE$ (g.c.g)

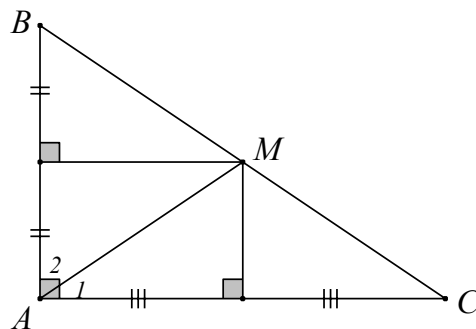
$$\Rightarrow BD = CE \text{ (2 cạnh tương ứng)}$$

c) $\triangle HBD = \triangle KCE \Rightarrow \angle HBD = \angle KCE$ (2 góc tương ứng)

mà $\angle ODE, \angle OED$ lần lượt đối đỉnh với $\angle HBD, \angle KCE$

$$\Rightarrow \angle ODE = \angle OED \Rightarrow \triangle ODE \text{ cân tại } O.$$

Bài 11.



Giả sử M nằm trên cạnh BC của $\triangle ABC$

Vì M là giao điểm 3 đường trung trực của tam giác ABC nên $MA = MB = MC$

Xét $\triangle ABM$ có $MA = MB$ nên $\triangle ABM$ là tam giác cân.

$$\Rightarrow \angle B = \angle A_2 \quad (1)$$

Xét $\triangle ACM$ có $MA = MC$ nên $\triangle ACM$ là tam giác cân.

$$\Rightarrow \angle A_1 = \angle C \quad (2)$$

Trong $\triangle ABC$ có $\angle B + \angle A + \angle C = 180^\circ$

$$\Rightarrow \angle B + \angle A_1 + \angle A_2 + \angle C = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle B + \angle A_1 + \angle A_2 + \angle C = 180^\circ$$

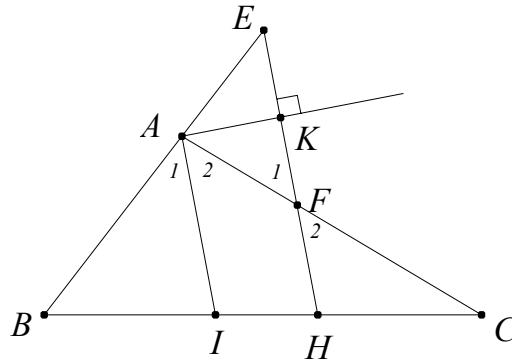
Từ (1) (2) suy ra $2\angle A_1 + 2\angle A_2 = 180^\circ$

$$\Rightarrow 2.(A_1 + A_2) = 180^\circ$$

$$\Rightarrow (A_1 + A_2) = 90^\circ \Rightarrow A = 90^\circ$$

$\Rightarrow \triangle ABC$ là tam giác vuông tại A.

Bài 12.



a) Ta có $AI \parallel EH \Rightarrow A_1 = E$ (đồng vị) và $A_2 = F_1$ (so le trong)

Mà $A_1 = A_2$ (AI là tia phân giác của BAC) nên $E = F_1$

$\Rightarrow \triangle EAF$ là tam giác cân ở A

$\Rightarrow AE = AF \Rightarrow$ điểm A thuộc đường trung trực của EF

$\Rightarrow$ trung trực của đoạn thẳng EF đi qua đỉnh A của $\triangle ABC$.

b) Gọi đường trung trực của EF cắt EF tại K.

Ta có $AI \parallel EH$ mà $AK \perp EH \Rightarrow AK \perp AI$

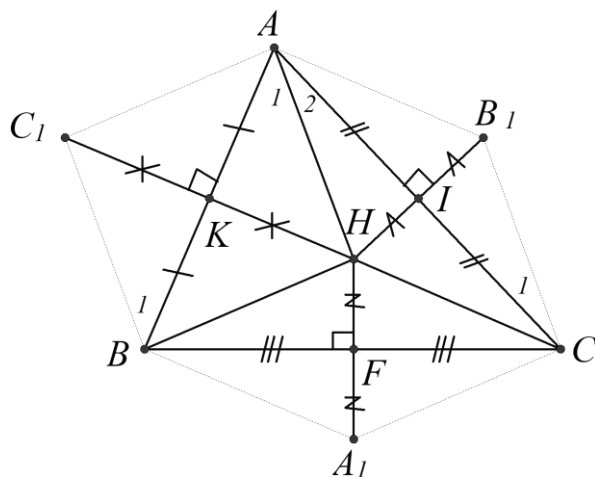
Vậy đường trung trực của đoạn thẳng EF vuông góc với AI.

c) $\triangle ABC$ cố định nên đường phân giác AI cố định,

Mà $AK \perp AI$ nên AK cũng cố định.

Suy ra khi điểm H chuyển động trên IC thì AK luôn cố định hay đường trung trực của EF luôn cố định.

Bài 13.



+ Xét $\triangle AKH$ và $\triangle BKC_1$ là hai tam giác vuông có:

$$AK = KB, KH = KC_1$$

$$\Rightarrow \triangle AKH = \triangle BKC_1 \text{ (hai cạnh góc vuông)}$$

$$\Rightarrow AH = BC_1 \quad (1) \text{ và } A_1 = B_1$$

$$\text{Vì } A_1 = B_1 \text{ và ở vị trí so le trong } \Rightarrow AH \parallel BC_1 \quad (2)$$

+ Xét $\triangle AIH$ và $\triangle CIB_1$ là hai tam giác vuông có:

$$HI = IB, AI = IC$$

$$\Rightarrow \triangle AIH = \triangle CIB_1 \text{ (hai cạnh góc vuông)}$$

$$\Rightarrow AH = CB_1 \quad (3) \text{ và } A_2 = C_1$$

$$\text{Vì } A_2 = C_1 \text{ và ở vị trí so le trong } \Rightarrow AH \parallel CB_1 \quad (4)$$

$$\text{Từ (1) và (3)} \Rightarrow BC_1 \parallel CB_1 \quad (\parallel AH)$$

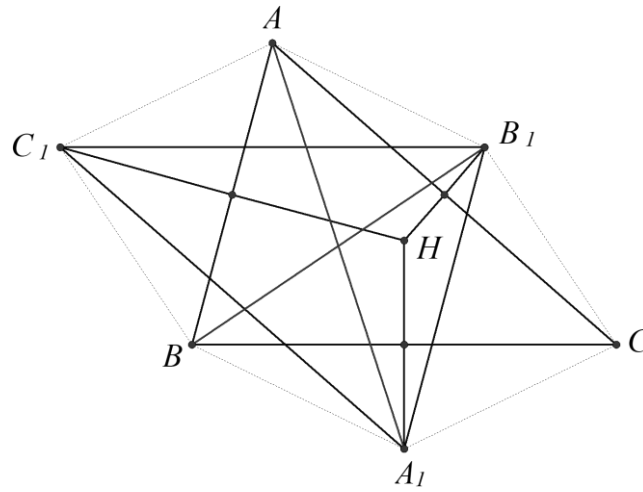
$$\text{Từ (2) và (4)} \Rightarrow BC_1 = CB_1 \quad (= AH)$$

+ Chứng minh tương tự ta có $AC_1 \parallel CA_1$ và $AC_1 = CA_1$; $BA_1 \parallel AB_1$ và $BA_1 = AB_1$

Mà H là giao điểm ba đường trung trực của $\triangle ABC$ nên $AH = BH = CH$

$$\text{Do đó } BC_1 = CB_1 = AC_1 = CA_1 = AB_1 = BA_1$$

b)



Kẻ BB_1, AA_1

Xét $\triangle BCB_1$ và $\triangle B_1C_1B$ có:

$B_1C = C_1B$ (chứng minh trên)

$BB_1C = B_1BC_1$ (2 góc so le trong của $B_1C // C_1B$)

BB_1 là cạnh chung

$\Rightarrow \triangle BCB_1 = \triangle B_1C_1B$ (c.g.c) $\Rightarrow BC = C_1B_1$

Chứng minh tương tự ta được $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$

Xét $\triangle A_1B_1C_1$ và $\triangle ABC$ có:

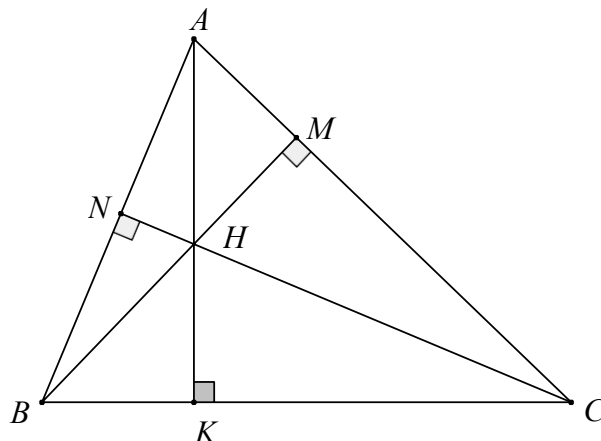
$C_1B_1 = BC$, $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$

$\Rightarrow \triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$ (c.c.c)

BA ĐƯỜNG CAO

Dạng 1. Xác định trực tâm của một tam giác

Bài 14.

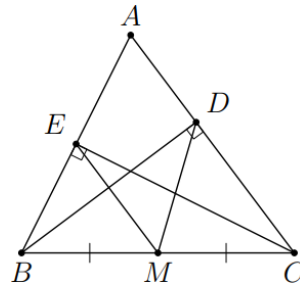


*) Các đường cao của $\triangle BHC$ là: HK, BN, CM cắt nhau tại A . Vậy trực tâm của $\triangle BHC$ là A .

*) Các đường cao của $\triangle AHC$ là: HM, AN, CK cắt nhau tại B . Vậy trực tâm của $\triangle AHC$ là B .

*) Các đường cao của $\triangle AHB$ là: HM, AM, BK cắt nhau tại C . Vậy trực tâm của $\triangle AHB$ là C .

Bài 15.

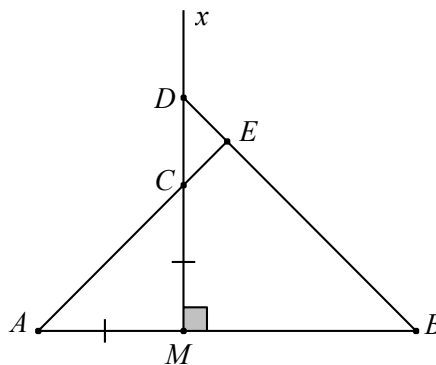


Ta có EM là đường trung tuyến trong $\triangle EBC$ vuông ở E , do đó $EM = \frac{1}{2}BC$ (1).

Tương tự ta có ED là đường trung tuyến trong $\triangle DBC$ vuông ở D , do đó $DM = \frac{1}{2}BC$ (2).

Từ (1),(2) suy ra $ME = MD$, do đó M nằm trên đường trung trực của ED .

Bài 16.



a) Do tia AC cắt BD tại E nên hai điểm C và D nằm cùng phía với AB .

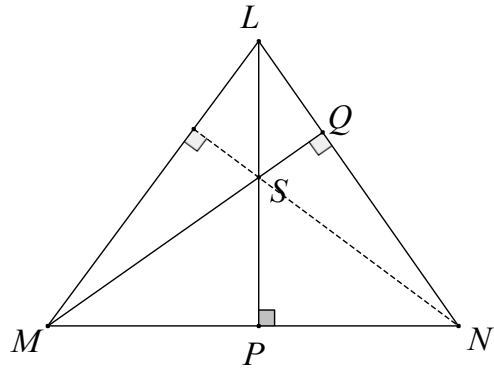
Do $MA = MC$ và $AMC = 90^\circ$ nên tam giác AMC vuông cân tại M . Tương tự ta có $\triangle BMD$ vuông cân tại M .

Từ đó suy ra $EDC = DCE = 45^\circ \Rightarrow CED = 90^\circ \Rightarrow AC \perp BD$.

b) Trong tam giác ABD , hai đường cao AE và DM cắt nhau nên C là trực tâm của tam giác ABD .

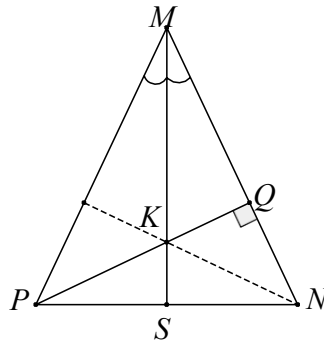
Dạng 2. Sử dụng tính chất trực tâm của tam giác để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, ba đường thẳng đồng quy

Bài 17.



Vì $MQ \perp LN$, $LN \perp MN \Rightarrow S$ là trực tâm của $\triangle LMN \Rightarrow NS \perp ML$

Bài 18.



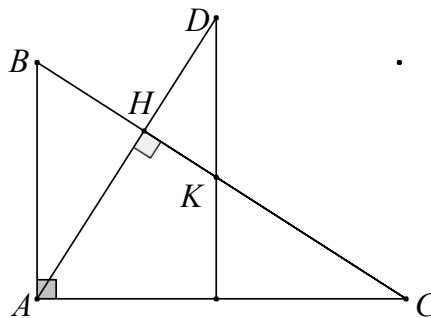
Xét $\triangle MPN$ cân tại M có MS là đường phân giác (gt) $\Rightarrow MS \perp PN$

Lại có $PQ \perp MN$

$\Rightarrow K$ là trực tâm của $\triangle MPN$

$\Rightarrow NK \perp MP$.

Bài 19.



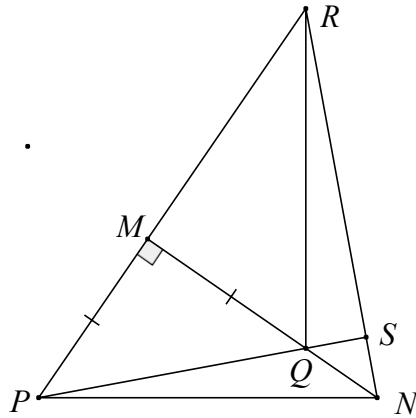
Ta có: $\begin{cases} AB \perp AC \text{ (gt)} \\ DK \parallel AB \text{ (gt)} \end{cases}$

$\Rightarrow DK \perp AC$ (quan hệ từ vuông góc đến song song)

Lại có: $CH \perp AD$ và DK giao CH tại K

$\Rightarrow K$ là trực tâm của $\triangle ADC \Rightarrow AK \perp CD$

Bài 20.



a) Gọi RN giao PQ tại S

Ta có: $MQ = MP$ (gt) $\Rightarrow \triangle MPQ$ cân tại M

Có $\angle NMP = 90^\circ \Rightarrow \angle SPR = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$

Tương tự: $\angle SRP = \frac{180^\circ - \angle RMN}{2} = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$

Lại có: $\angle RSP + \angle SRP + \angle SPR = 180^\circ$ (định lý tổng ba góc trong tam giác)

$$\Rightarrow \angle RSP = 180^\circ - \angle SRP - \angle SPR = 90^\circ$$

$$\Rightarrow PQ \perp NR.$$

a) Xét $\triangle PRN$ có: $NM \perp RP$ (gt) và $PS \perp RN$ (cmt)

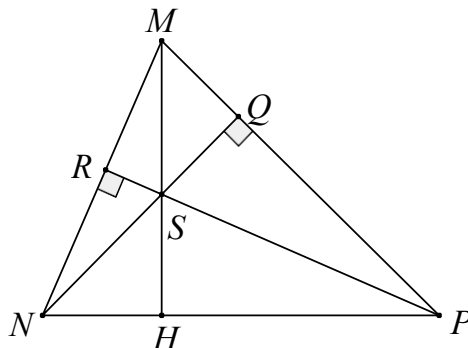
mà NM giao PS tại Q

$$\Rightarrow Q \text{ là trực tâm của } \triangle PRN$$

$$\Rightarrow RQ \perp NP.$$

Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường cao trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

Bài 21.



a) Xét $\triangle MNP$ có: $PR \perp MN$ (gt), $NQ \perp MP$ (gt)

$$\Rightarrow S \text{ là trực tâm của } \triangle MNP$$

$$\Rightarrow MS \perp NP.$$

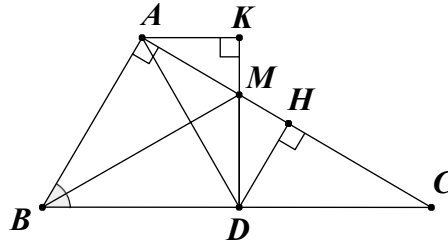
b) Gọi MS giao NP tại H

$\Rightarrow MH \perp NP \Rightarrow \triangle NMH$ vuông tại H

$\Rightarrow \angle SMR + \angle MNH = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle SMR = 90^\circ - \angle MNH = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$.

Bài 22.



a) Ta có: $BA = BD$ (gt)

$\Rightarrow \triangle BAD$ cân tại B

Lại có: BM là đường phân giác (gt)

$\Rightarrow BM \perp AD$.

b) Xét $\triangle AMD$ có:

$$\begin{cases} BM \perp AD \\ AK \perp MD \\ DH \perp AM \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Ba đường thẳng AK, BM, DH là ba đường cao của $\triangle AMD$

$\Rightarrow$ Ba đường thẳng AK, BM, DH đồng quy.

PHIẾU BÀI TẬP

BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC

Dạng 1. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác

Bài 1. Chọn đáp án đúng. Điểm cách đều 3 đỉnh của tam giác là giao điểm của:

A. 3 đường trung tuyến.

B. 3 đường phân giác.

C. 3 đường trung trực.

D. 3 đường cao.

Bài 2. Chọn đáp án đúng.

a) Cho $\triangle ABC$ tù, giao điểm 3 đường trung trực của tam giác nằm:

A. trong $\triangle ABC$.

B. ngoài $\triangle ABC$.

C. trên 1 cạnh của $\triangle ABC$.

D. trùng với 1 đỉnh của $\triangle ABC$.

b) Cho $\triangle ABC$ có $A = 90^\circ$ thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác:

A. nằm trong $\triangle ABC$

B. nằm ngoài $\triangle ABC$

C. là trung điểm của cạnh BC

D. trùng với đỉnh A của $\triangle ABC$

c) Cho $\triangle ABC$ nhọn, giao điểm 3 đường trung trực của tam giác nằm:

A. trong $\triangle ABC$

B. ngoài $\triangle ABC$

C. trên một cạnh của $\triangle ABC$

D. trùng với một đỉnh của $\triangle ABC$

Bài 3. Cho $\triangle ABC$. Vẽ điểm O cách đều ba đỉnh A, B, C và vẽ đường tròn đi qua 3 đỉnh của tam giác trong mỗi trường hợp sau:

a) $\triangle ABC$ là tam giác nhọn.

b) $\triangle ABC$ vuông tại A .

c) $\triangle ABC$ là tam giác tù.

Bài 4. Cho A, B, C là ba điểm phân biệt không thẳng hàng. Xác định đường tròn đi qua ba điểm đó.

Bài 5. Cho $\triangle ABC$ có $A > 90^\circ$. Các đường trung trực của AB và của AC cắt nhau ở O và cắt BC theo thứ tự ở D và E . Nối AD, AE, OB, OC . Tìm tam giác bằng $\triangle OAD$, bằng $\triangle OAE$.

Bài 6. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Tia phân giác của các góc BAH và CAH cắt BC lần lượt ở D và E . Gọi O là giao điểm các đường phân giác của tam giác ABC .

a) Chứng minh rằng đường tròn tâm O , bán kính OA đi qua ba điểm A, D, E .

b) Tính số đo góc DOE .

Bài 7. Tam giác ABC có A là góc tù. Các đường trung trực của các cạnh AB và AC cắt nhau ở O . Các điểm B và C có thuộc đường tròn tâm O bán kính OA hay không? Vì sao?

Bài 8. Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn, O là giao điểm hai đường trung trực của AB và AC . Trên tia đối của tia OB lấy điểm D sao cho $OB = OD$.

a) Chứng minh O thuộc đường trung trực của AD và CD .

b) Chứng minh các $\triangle ABD$, $\triangle CBD$ vuông.

c) Biết $\angle ABC = 70^\circ$. Hãy tính số đo $\angle ADC$.

Bài 9. Tam giác ABC có ba đường trung tuyến cắt nhau tại O . Biết rằng điểm O cũng là giao điểm của ba đường trung trực trong tam giác ABC . Chứng minh tam giác ABC đều.

Bài 10. Cho $\triangle ABC$ đều. Trên cạnh AB, BC, CA lấy theo thứ tự ba điểm M, N, P sao cho $AM = BN = CP$

a. Chứng minh $\triangle MNP$ là tam giác đều

b. Gọi O là giao điểm các đường trung trực của $\triangle ABC$.

Chứng minh rằng điểm O cũng là giao điểm các đường trung trực của $\triangle MNP$

Bài 11. Trong một buổi tổng vệ sinh sân trường, 3 tổ cần dọn cỏ và rác của 3 bồn cây A, B, C ở 3 góc sân trường. Em hãy giúp 3 tổ chọn một vị trí O để đặt chiếc xe đẩy rác sao cho vị trí chiếc xe cách đều 3 bồn cây đó.

Dạng 2. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy, ba điểm thẳng hàng

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Dựng tam giác BCD cân tại D biết D khác phía với A đối với đường thẳng BC . Gọi O là giao điểm của AB và AC . Chứng minh rằng A, O, D thẳng hàng.

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Gọi M là trung điểm của BC . Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau ở E .

Chứng minh ba điểm A, E, M thẳng hàng.

Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi G là trọng tâm, O là giao điểm ba đường trung trực của tam giác ABC .

a) Tam giác BOC là tam giác gì?

b) Chứng minh ba điểm A, O, G thẳng hàng?

Bài 4. Cho tam giác ABC cân ở A . Gọi M là trung điểm của BC . Các đường trung trực của AB, AC cắt nhau ở E . Chứng minh ba điểm A, E, M thẳng hàng.

Bài 5. Cho tam giác ABC cân tại A . Lấy điểm D sao cho tam giác BCD cân tại D (D và A nằm khác phía đối với đường thẳng BC). Chứng minh các đường trung trực của AB và AC đồng quy với đường thẳng AD

Bài 6. Cho $\triangle ABC$ vuông ở A , D là giao điểm hai đường trung trực của hai cạnh AB và AC .

Chứng minh B, D, C thẳng hàng.

Bài 7. Cho tam giác ABC cân tại A . M là trung điểm của BC . Kẻ ME vuông góc AB tại E , MF vuông góc với AC tại F .

a) Chứng minh rằng AM là đường trung trực của EF ?

b) Kẻ đường thẳng d vuông góc AB tại B , kẻ đường thẳng d' vuông góc với AC tại C , hai đường thẳng d và d' giao nhau tại D . Chứng minh rằng ba điểm A, M, D thẳng hàng?

Bài 8. Cho tam giác nhọn ABC . Gọi H, G, O theo thứ tự là trực tâm, trọng tâm, giao điểm ba đường trung trực của tam giác. Tia AG cắt BC ở M . Gọi I là trung điểm của GA , K là trung điểm của GH . Chứng minh:

a) $OM = \frac{1}{2}AH$

b) $\triangle IGK = \triangle MGO$

c) Ba điểm H, G, O thẳng hàng

d) $GH = 2GO$

Bài 9. Cho tam giác ABC cân ở A , đường phân giác AK . Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O . Kéo dài CO cắt AB ở D , kéo dài BO cắt AC ở E .

a) Chứng minh ba điểm A, K, O thẳng hàng.

b) Chứng minh AK và các đường trung trực của AD và AE đồng quy.

Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường trung trực trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ cân tại A , đường trung tuyến AM . Đường trung trực của AC cắt đường thẳng AM tại D . Chứng minh rằng $DA = DB$.

Bài 2. Cho tam giác cân ABC có $AB = AC$. Hai đường trung trực của hai cạnh AB, AC cắt nhau tại O . Chứng minh: $AOB = AOC$.

Bài 3. Cho $\triangle ABC$, M là trung điểm của BC . Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O . Tính số đo góc OMB .

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ có góc $A = 110^\circ$. Đường trung trực của các cạnh AB và AC cắt nhau tại I .

a) Chứng minh $\triangle BIC$ cân.

b) Chứng minh $BIC = 2(180^\circ - BAC)$ và tính số đo góc BIC .

Bài 5. Cho $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 60^\circ$. Các đường trung trực của cạnh AB và AC lần lượt cắt BC ở E và F . Tính EA .

Bài 6. Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Đường trung tuyến AM cắt đường trung trực của AC tại K . Chứng minh rằng $KA = KB = KC$.

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ cân tại A , $A > 90^\circ$. Các đường trung trực của AB và của AC cắt nhau tại O và cắt BC tại D và E . Chứng minh rằng:

a) OA là đường trung trực của BC .

b) $BC = CE$.

c) $\triangle ODE$ là tam giác cân.

Bài 8. Chứng minh rằng các đường trung trực của tam giác vuông cắt nhau tại trung điểm của cạnh huyền.

Bài 9. Cho tam giác đều ABC . Gọi D và E là hai điểm lần lượt trên hai cạnh AB và AC sao cho $BD = AE$. Chứng minh rằng các đường trung trực của đoạn thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định khi D và E di chuyển trên các cạnh AB và AC .

Bài 10. Cho $\triangle ABC$, $AC > AB$. Hai điểm D và E theo thứ tự di chuyển trên các cạnh AB và AC sao cho $BD = CE$. Chứng minh rằng các đường trung trực của DE luôn đi qua một điểm cố định.

BA ĐƯỜNG CAO

Dạng 1. Xác định trực tâm của một tam giác

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ có $\angle C = 90^\circ$, $AH \perp BC$. Em chọn phát biểu đúng:

- A. H là trực tâm của $\triangle ABC$
- B. A là trực tâm của $\triangle ABC$
- C. B là trực tâm của $\triangle ABC$
- D. C là trực tâm của $\triangle ABC$

Bài 2. Cho $\triangle ABC$, hai đường cao AM và BN cắt nhau tại H . Em chọn phát biểu đúng:

- A. H là trọng tâm của $\triangle ABC$.
- B. $HA = \frac{2}{3}AM$ và $HB = \frac{2}{3}BN$
- C. H là trực tâm của $\triangle ABC$; CH là đường cao của $\triangle ABC$.
- D. CH là đường trung trực của $\triangle ABC$.

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $AM \perp BC$ tại M . Chọn phát biểu đúng:

- A. AM là đường trung tuyến của $\triangle ABC$
- B. AM là đường trung trực của BC .
- C. AM là đường phân giác của $\angle BAC$.
- D. Cả A, B, C đều đúng.

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Lấy H thuộc AB , vẽ $HE \perp BC$ ở E . Tia EH cắt tia CA tại D . Khi đó

- A. H là trọng tâm của $\triangle BCD$.
- B. H là trực tâm của $\triangle BCD$.
- C. H là giao ba đường trung trực của $\triangle BCD$.
- D. H là giao ba đường phân giác của $\triangle BCD$.

Bài 5. Cho tam giác $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Tìm trực tâm của các giác $\triangle ABC$, $\triangle AHB$, $\triangle AHC$.

Bài 6. Cho H là trực tâm của tam giác ABC không vuông. Tìm trực tâm của các tam giác HBC , HAB , HAC

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ có $\angle A = 70^\circ$, $AB < AC$, đường phân giác góc A cắt BC tại D , $BF \perp AC$ tại F , H là giao điểm của BF và AD , E thuộc AC sao cho $AE = AB$.

- a) Xác định trực tâm của $\triangle ABE$.
- b) Tính số đo $\angle DHF$.

Dạng 2. Sử dụng tính chất trực tâm của tam giác để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, ba đường thẳng đồng quy

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ cân tại A , đường cao BE cắt đường trung tuyến AD ở H . Chứng minh CH tạo với AB một góc 90° .

Bài 2. Cho tam giác $\triangle ABC$ cân tại A . đường cao CH cắt tia phân giác của góc A tại D . Chứng minh rằng $BD \perp AC$.

Bài 3. Cho $\triangle MNP$ vuông tại M . Trên cạnh MN lấy điểm Q , kẻ $QR \perp NP (R \in NP)$. Gọi O là giao điểm của các đường thẳng PM và RQ . Chứng minh $PQ \perp ON$.

Bài 4. Cho tam giác ABC cân tại A . Lấy điểm D sao cho A là trung điểm của BD . Kẻ đường cao AE của tam giác ABC , đường cao AF của tam giác ACD . Chứng minh rằng $AE \perp AF$.

Bài 5. Cho tam giác MNP có ba góc nhọn, các đường cao NQ, PR cắt nhau tại S .

a) Chứng minh $MS \perp NP$.

b) Cho $MNP = 65^\circ$. Tính SMR .

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A , kẻ đường cao AH . Lấy điểm K thuộc đoạn thẳng HC . Qua K kẻ đường thẳng song song với AB , cắt AH tại D . Chứng minh $AK \perp CD$.

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông cân tại B . Trên cạnh AB lấy điểm H . Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho $BH = BD$. Chứng minh

a) $DH \perp AC$.

b) $CH \perp AD$.

Bài 8. Cho tam giác MNP vuông tại M ($MP < MN$). Trên cạnh MN lấy điểm Q sao cho $MQ = MP$, trên tia đối của tia MP lấy điểm R sao cho $MR = MN$. Chứng minh:

a) $PQ \perp NR$.

b) $RQ \perp NP$.

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A , kẻ đường phân giác BM . Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = BA$.

a) Chứng minh $BM \perp AD$.

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên AC , K là hình chiếu vuông góc của A trên DM . Chứng minh ba đường thẳng AK, BM, DH đồng quy.

Bài 10. Đoạn thẳng AB và điểm M nằm giữa A và B ($MA < MB$). Vẽ tia đó lấy hai điểm C và D sao cho $MA = MC, MD = MB$. Tia AC vuông cắt BD tại E . Chứng minh:

a) $AE \perp BD$

b) C là trực tâm của tam giác ABD

Bài 11. Cho góc nhọn xOy . Trên tia Ox lấy điểm A , trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OA = OB$. Kẻ $AC \perp Oy, BD \perp Ox (C \in Oy, D \in Ox)$. Đường thẳng vuông góc với Ox tại A và đường thẳng vuông góc với Oy tại B cắt nhau tại M . Chứng minh: OM, AC, BD đồng quy.

Bài 12. Cho tam giác ABC vuông tại A có BD là đường phân giác. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BA = BE$. Vẽ $CH \perp DB$. Chứng minh rằng BA, DE, CH đồng quy.

Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường cao trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ đều. Ba đường cao AM, BN, CP cắt nhau tại O . Chứng minh rằng:

- a) $OA = OB = OC$.
- b) O là trọng tâm của $\triangle ABC$
- c) $AM = BN = CP$

Bài 2. Chứng minh rằng một tam giác có hai đường cao (xuất phát từ các đỉnh của hai góc nhọn) bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

Bài 3. Chứng minh rằng một tam giác có ba đường cao bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , kẻ đường cao AH và trung tuyến AM . Chứng minh trục tâm của $\triangle ABC, \triangle MAB$ và $\triangle MAC$ thẳng hàng.

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A . Đường cao AH . Lấy I là trung điểm của AC .

- a) Chứng minh I là giao điểm của 3 đường trung trực $\triangle AHC$
- b) Gọi K và D lần lượt là trung điểm của AH và HC . Chứng minh $KD \parallel AC$.
- c) Chứng minh $BK \perp AD$.

Bài 6. Cho tam ABC cân tại A , hai đường cao BD và CE cắt nhau tại $I (D \in AC, E \in AB)$. Tia AI cắt BC tại M . Chứng minh

- a) M là trung điểm của BC .
- b) Tam giác MED là tam giác cân.

Bài 7. Cho tam giác ABC cân tại A , đường trung tuyến AM và đường phân giác BD cắt nhau tại K . Gọi E là giao điểm của CK và AB . Chứng minh $BD = CE$.

Bài 8. Cho tam giác ABC . Hai đường cao AH, BK cắt nhau tại I .

- a) Chứng minh rằng $CI \perp AB$.
- b) Khi $\angle ACH = 50^\circ$, hãy tính các góc $\angle BIH, \angle HIK$.

Bài 9. Cho tam giác ABC cân tại A . Hai đường cao xuất phát từ đỉnh B và đỉnh C cắt nhau tại M . Biết góc $\angle BMC = 120^\circ$, tính các góc của tam giác ABC .

Bài 10. Cho tam giác ABC cân tại A, M là trung điểm của B, C . Gọi H và K lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB và AC . Chứng minh $MH = MK$.

Phần III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC

Dạng 1. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ cân tại A , đường trung tuyến AM . Đường trung trực của AB cắt AM ở O . Chứng minh rằng điểm O cách đều ba đỉnh của $\triangle ABC$

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ cân tại A , O là giao điểm của ba đường trung trực. Lấy điểm D trên cạnh AB , điểm E trên cạnh AC sao cho $AD = CE$. Chứng minh rằng

- a) $OA = OB = OC$.

b) Điểm O nằm trên đường trung trực của DE .

Bài 3. Nhà bạn Nam có một mảnh vườn nhỏ trồng hoa và cỏ nhật. Bố của bạn Nam nhờ Nam chọn vị trí để đặt vòi xoay phun tưới cây tự động sao cho vị trí đó cách đều ba khóm hoa ở ba góc vườn nhưng Nam lại chưa biết tìm như thế nào. Các em hãy giúp bạn Nam giải quyết vấn đề này nhé.

Bài 4. Ông Hùng có ba cửa hàng A, B, C không nằm trên một đường thẳng và đang muốn tìm địa điểm O để làm kho hàng. Phải chọn vị trí của kho hàng ở đâu để khoảng cách từ kho đến các cửa hàng bằng nhau?

Dạng 2. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy, ba điểm thẳng hàng

Bài 5. Cho tam giác ABC cân ở A , đường phân giác AK . Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O .

a) Chứng minh rằng ba điểm A, K, O thẳng hàng.

b) Kéo dài CO cắt AB ở D , kéo dài BO cắt AC ở E . Chứng minh rằng AK và các đường trung trực của AD và AE đồng quy.

Bài 6. Cho $xOy = 90^\circ$ và điểm P nằm trong góc đó. Trên mặt phẳng đó lấy điểm A sao cho Ox là đường trung trực của đoạn thẳng PA và điểm B sao cho Oy là đường trung trực của đoạn thẳng PB .

a) Chứng minh ba điểm O, A, B thẳng hàng.

b) Chứng minh O là giao điểm của ba đường trung trực của $\triangle ABP$ từ đó suy ra $\triangle ABP$ vuông.

Bài 7. Cho tam giác MNP cân ở M , đường cao MH . Các đường trung trực của MN và MP cắt nhau ở D . Chứng minh ba điểm M, D, H thẳng hàng.

Bài 8. Cho tam giác ABC cân có A là góc tù. Gọi M là trung điểm của BC . N nằm trong tam giác ABC sao cho tam giác BNC cân tại N . Chứng minh đường thẳng AM và các đường trung trực của NB, NC đồng quy.

Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường trung trực trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

Bài 9. Cho $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 110^\circ$. Các đường trung trực của cạnh AB và AC lần lượt cắt BC ở E và F . Tính $\angle EAF$.

Bài 10. Cho $\triangle ABC$ cân tại A , $A > 90^\circ$. Các đường trung trực của AB và của AC cắt nhau tại O và cắt BC tại D và E .

Chứng minh rằng:

a) OA là đường trung trực của BC .

b) $BD = CE$.

c) $\triangle ODE$ là tam giác cân.

Bài 11. Cho M là giao điểm 3 đường trung trực của tam giác ABC . Chứng minh rằng nếu M nằm trên một cạnh của tam giác ABC thì ABC là một tam giác vuông.

Bài 12. Cho $\triangle ABC$, đường phân giác AI ($I \in BC$). Trên đoạn thẳng IC lấy điểm H , từ H kẻ đường thẳng song song với AI cắt AB kéo dài tại E và cắt AC tại F . Chứng minh rằng:

- Đường trung trực của đoạn thẳng EF đi qua đỉnh A của $\triangle ABC$.
- Đường trung trực của đoạn thẳng EF vuông góc với AI .
- Khi H di động trên tia IC của $\triangle ABC$ cố định thì đường trung trực của đoạn thẳng EF cố định.

Bài 13. Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn. Các điểm F, K, I lần lượt là trung điểm các cạnh BC, BA, AC . Gọi H là giao điểm các đường trung trực $\triangle ABC$. Trên tia đối của tia FH lấy điểm A_1 sao cho $A_1F = FH$. Trên tia đối của tia KH lấy điểm C_1 sao cho $KH = KC_1$. Trên tia đối của tia IH lấy điểm B_1 sao cho $IH = IB_1$.

- Chứng minh rằng hình lục giác $AC_1BA_1CB_1$ có 6 cạnh bằng nhau và 2 trong 6 cạnh đó đôi một song song.
- Chứng minh rằng: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

BA ĐƯỜNG CAO

Dạng 1. Xác định trục tâm của một tam giác

Bài 14. Cho $\triangle ABC$, các đường cao AK, BN, CM . Điểm H là trục tâm của tam giác. Tìm trục tâm của $\triangle BHC$, $\triangle AHC$, $\triangle AHB$.

Bài 15. Cho tam giác ABC , hai đường cao BD và CE . Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh M thuộc trục tâm của DE .

Bài 16. Đoạn thẳng AB và điểm M nằm giữa A và B ($MA < MB$). Vẽ tia Mx vuông AB lấy hai điểm C và D sao cho $MA = MC, MD = MB$. Tia AC vuông cắt BD tại E . Chứng minh

- $AE \perp BD$
- C là trục tâm của tam giác $\triangle ABD$.

Dạng 2. Sử dụng tính chất trục tâm của tam giác để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, ba đường thẳng đồng quy

Bài 17. Cho tam giác LMN nhọn và điểm S nằm trong tam giác. Gọi LS cắt MN tại P , MS cắt LN tại Q . Chứng minh rằng nếu LP vuông góc với MN và MQ vuông góc với LN thì NS vuông góc với ML .

Bài 18. Cho $\triangle MNP$ cân tại M , đường cao PQ cắt đường phân giác MS ở K . Chứng minh $NK \perp MP$

Bài 19. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , kẻ đường cao AH . Lấy điểm K thuộc đoạn thẳng HC . Qua K kẻ đường thẳng song song với AB , cắt AH tại D . Chứng minh $AK \perp CD$.

Bài 20. Cho $\triangle MNP$ vuông tại M ($MP < MN$). Trên cạnh MN lấy điểm Q sao cho $MQ = MP$, trên tia đối của tia MP lấy điểm R sao cho $MR = MN$. Chứng minh:

- $PQ \perp NR$.
- $RQ \perp NP$.

Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường cao trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

Bài 21. Cho $\triangle MNP$ có ba góc nhọn, các đường cao NQ, PR cắt nhau tại S .

c) Chứng minh $MS \perp NP$.

d) Cho $\angle MNP = 65^\circ$. Tính $\angle SMR$.

Bài 22. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , kẻ đường phân giác BM . Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = BA$.

c) Chứng minh $BM \perp AD$.

d) Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên AC , K là hình chiếu vuông góc của A trên DM . Chứng minh ba đường thẳng AK, BM, DH đồng quy.