

Bài I. (3,0 điểm)

1) Rút gọn mỗi biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{20} + \frac{1}{3}\sqrt{45} - 0,75\sqrt{80}$.

b) $B = \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \right) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{8})$.

2) Tìm x , biết:

a) $2\sqrt{x-1} - \frac{1}{4}\sqrt{4x-4} + \frac{1}{2}\sqrt{9x-9} = 3$.

b) $\sqrt{2x^2 - 5x} = \sqrt{x^2 - 4x}$.

Bài II. (2,5 điểm)

1) Một nhà hát có sức chứa cố định được chia thành các dãy ghế với số lượng ghế mỗi dãy như nhau. Để phục vụ đa dạng các chương trình biểu diễn, từ cách bố trí ghế mặc định ban đầu, ban quản lý còn có hai phương án sắp xếp khác mà không làm thay đổi sức chứa:

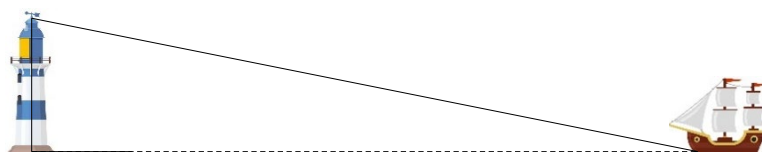
- Phương án 1: Nếu giảm 6 dãy ghế thì mỗi dãy tăng 5 ghế.
- Phương án 2: Nếu muốn tăng được 10 dãy ghế thì mỗi dãy phải giảm 5 ghế.

Hỏi nhà hát có sức chứa bao nhiêu ghế?

2) Hai nhân viên văn phòng dự định cùng hoàn thành một công việc trong 6 giờ. Do người thứ nhất bận đột xuất nên họ chỉ làm chung trong 4 giờ và người thứ hai mất 5 giờ để hoàn thành phần còn lại. Hỏi nếu làm riêng từ đầu thì mỗi người hoàn thành công việc đó trong bao lâu?

Bài III. (1,0 điểm)

Anh Cường đứng trên ngọn hải đăng ở độ cao 60 mét để quan sát một chiếc tàu đang tiến đến.



- 1) Tính khoảng cách giữa tàu và ngọn hải đăng, biết góc tạo bởi phương thẳng đứng với đường thẳng đi qua tàu và vị trí quan sát là 80° (làm tròn đến hàng đơn vị của mét).
- 2) Sau 5 phút, anh tiếp tục quan sát con tàu tiến gần hơn đến ngọn hải đăng. Lúc này, góc tạo bởi phương thẳng đứng với đường thẳng đi qua tàu và vị trí quan sát là 60° . Tính vận tốc trung bình của tàu trong 5 phút này (làm tròn đến hàng phần trăm của km/h).

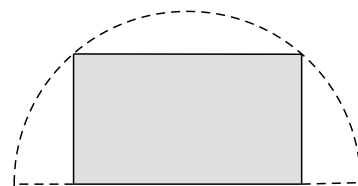
Bài IV. (3,0 điểm)

Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn (O) , kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). OA cắt BC tại H .

- 1) Chứng minh OA vuông góc với BC .
- 2) Đường thẳng qua A , không đi qua O , cắt đường tròn (O) tại hai điểm M, N (M nằm giữa A và N). Gọi K là trung điểm của MN . OK cắt BC tại I . Chứng minh $OB^2 = OH.OA = OK.OI$ và IM là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- 3) Lấy điểm D bất kì trên cung nhỏ BC . Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại D cắt AB, AC lần lượt tại E, F . Xác định vị trí của điểm D để diện tích tam giác AEF lớn nhất.

Bài V. (0,5 điểm)

Từ một miếng tôn hình bán nguyệt có diện tích $\frac{\pi}{2} \text{ m}^2$, cần cắt bỏ phần tôn với tổng diện tích bao nhiêu mét vuông để thu được phần còn lại có dạng hình chữ nhật với diện tích lớn nhất?



----- HẾT -----

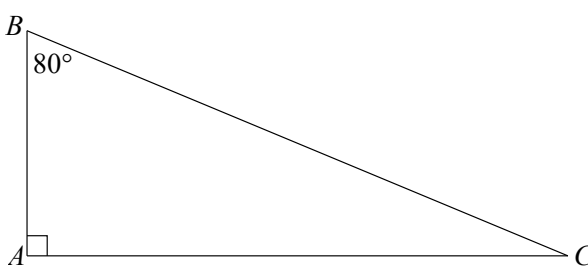
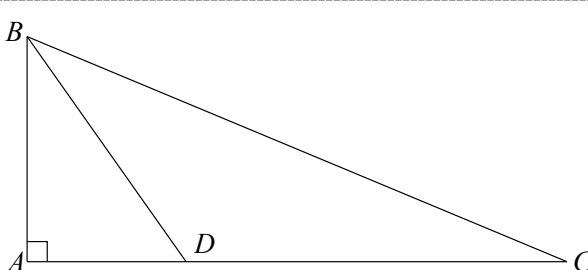
- Học sinh không được sử dụng tài liệu.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

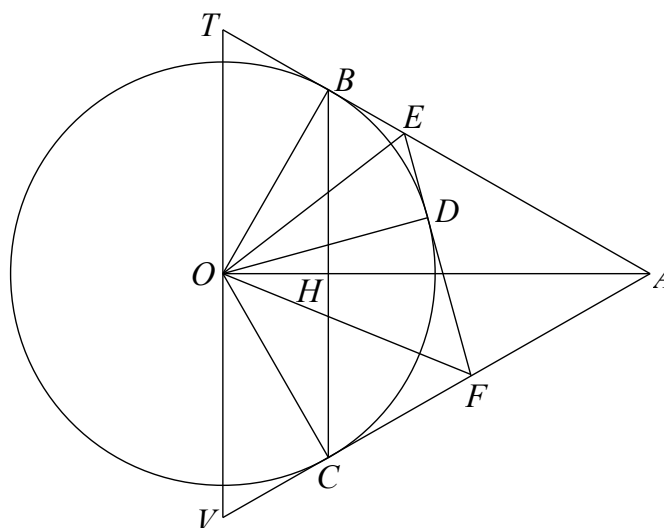
Họ và tên học sinh: Số báo danh:

BIỂU ĐIỂM KHẢO SÁT THÁNG 12 TOÁN 9 NĂM HỌC 2024 – 2025

Bài I (3,0đ)	1a) $A = \sqrt{20} + \frac{1}{3}\sqrt{45} - 0,75\sqrt{80}.$	0,5
	$= 2\sqrt{5} + \frac{1}{3}.3\sqrt{5} - 0,75.4\sqrt{5}$	0,25
	$= 0.$	0,25
	1b) $B = \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \right) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{8}).$	0,5
	$= (\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$	0,25
	$= -3.$	0,25
	2a) $2\sqrt{x-1} - \frac{1}{4}\sqrt{4x-4} + \frac{1}{2}\sqrt{9x-9} = 3.$	1,0
	ĐKXD: $x \geq 1.$	0,25
	Biến đổi được: $2\sqrt{x-1} - \frac{1}{4}.2\sqrt{x-1} + \frac{1}{2}.3\sqrt{x-1} = 3.$	0,25
	$\sqrt{x-1} = 1$	0,25
	Tính được $x = 2$ (TMĐK) và kết luận.	0,25
	2b) $\sqrt{2x^2 - 5x} = \sqrt{x^2 - 4x}.$	1,0
	ĐKXD: $2x^2 - 5x \geq 0$ hoặc $x^2 - 4x \geq 0.$	0,25
	Biến đổi được: $2x^2 - 5x = x^2 - 4x.$	0,25
Bài II (2,5đ)	1) Hỏi nhà hát có sức chứa bao nhiêu ghế?	1,0
	Gọi số dây ghế là x (dây) và số ghế mỗi dây là y (ghế) theo cách bố trí mặc định ($x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$).	0,25
	Theo đề bài, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} (x-6)(y+5) = xy \\ (x+10)(y-5) = xy \end{cases}.$	0,25
	Giải hệ phương trình, tìm được $x = 30$ (TMĐK) và $y = 20$ (TMĐK).	0,25
	Kết luận sức chứa của nhà hát là $30.20 = 600$ ghế.	0,25

	2) Hỏi nếu làm riêng từ đầu thì mỗi người hoàn thành công việc đó trong bao lâu?	1,5
	Gọi thời gian để người thứ nhất và người thứ hai làm riêng công việc từ đầu cho tới khi hoàn thành lần lượt là x và y (giờ, $x > 0, y > 0$).	0,25
	Mỗi giờ, người thứ nhất và người thứ hai làm được lần lượt $\frac{1}{x}$ (công việc) và $\frac{1}{y}$ (công việc).	0,25
	Theo đề bài, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ \frac{4}{x} + \frac{9}{y} = 1 \end{cases}$	0,5
	Giải hệ phương trình, tìm được $x = 10$ (TMĐK) và $y = 15$ (TMĐK).	0,25
	Kết luận nếu làm riêng từ đầu, người thứ nhất cần 10 giờ và người thứ hai cần 15 giờ để hoàn thành công việc.	0,25
Bài II (1,0đ)	1) Tính khoảng cách giữa tàu và ngọn hải đăng.	0,5
	HS cần vẽ hình và nêu được: A là chân ngọn hải đăng B là vị trí của anh Cường C là vị trí của tàu Tam giác ABC vuông tại A có $AB = 60$ (m), $\widehat{ABC} = 80^\circ$ Khoảng cách cần tìm là AC. 	0,25
	Tính được $AC = AB \cdot \tan 80^\circ = 60 \cdot \tan 80^\circ \approx 340$ (m) và kết luận khoảng cách giữa tàu và ngọn hải đăng xấp xỉ 340 mét.	0,25
	2) Tính vận tốc trung bình của thuyền trong 5 phút này.	0,5
	Tính được: $CD = 60 \cdot \tan 80^\circ - 60\sqrt{3}$ (m) Chú ý: Không chấp nhận kết quả làm tròn: $340 - 60\sqrt{3}$ hoặc $340 - 104$. 	0,25

	Vận tốc trung bình của thuyền: $\left(60 \cdot \tan 80^\circ - 60\sqrt{3}\right) \cdot \frac{12}{1000} \approx 2,84$ (km/h).	
	Chú ý: Không chấp nhận kết quả làm tròn: $(340 - 60\sqrt{3}) \cdot \frac{12}{1000} \approx 2,83$	0,25
	hoặc $(340 - 104) \cdot \frac{12}{1000} \approx 2,83$	
	1) Chứng minh OA vuông góc với BC .	1,0
		Vẽ hình đúng đề bài 0,25
		Chỉ ra O và A lần lượt cách đều B, C . 0,25
		Suy ra OA là đường trung trực của BC . 0,25
		Kết luận $OA \perp BC$. 0,25
Bài IV (3,0đ)	2) Chứng minh $OB^2 = OH.OA = OK.OI$	1,0
	Chỉ ra tam giác OBH đồng dạng với tam giác OAB	0,25
	Suy ra $\frac{OB}{OA} = \frac{OH}{OB} \Rightarrow OB^2 = OH.OA$.	0,25
	Chú ý: Không chấm 0,5 này nếu HS sử dụng hệ thức lượng theo CT cũ.	
	Chỉ ra $\widehat{OKM} = 90^\circ$, khi đó tam giác OHI đồng dạng với tam giác OKA	0,25
	Suy ra $\frac{OH}{OK} = \frac{OI}{OA} \Rightarrow OH.OA = OK.OI$ và kết luận.	0,25
	Chứng minh IM là tiếp tuyến của đường tròn (O).	0,5
	Từ $OK.OI = OB^2 = OM^2$, suy ra tam giác OKM đồng dạng tam giác OMI .	0,25
	Từ đó suy ra $\widehat{OMI} = 90^\circ$ và kết hợp $M \in (O) \Rightarrow \text{ĐPCM}$.	0,25
	3) Xác định vị trí của điểm D để diện tích tam giác AEF lớn nhất.	0,5



Chỉ ra chu vi tam giác AEF **không đổi** và bằng $2AB$ khi D thay đổi.
 Qua O kẻ đường thẳng song song BC , cắt AB và AC lần lượt tại T và V .
 Chỉ ra $\widehat{EOF} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \widehat{ATO} = \widehat{AVO}$.
 Suy ra tam giác OTE đồng dạng với tam giác FVO (cùng đồng dạng với tam giác FOE).
 Khi đó $TE.FV = OT.OV = \frac{1}{4}TV^2$ (**không đổi**).

0,25

Ta có: $S_{AEF} = S_{ATV} - S_{EOF} - S_{OTE} - S_{OVF} = \frac{1}{2}[OA.TV - R.(EF + ET + FV)]$
 Mà $EF = 2AB - AE - AF = 2AB - (AT - ET) - (AV - FV)$

$$= 2AB - 2AT + ET + FV$$

$$\Rightarrow S_{AEF} = \frac{1}{2}[OA.TV - R.(2AB - 2AT + 2ET + 2FV)]$$

$$= \frac{1}{2}OA.TV + R.BT - R.(TE + FV)$$

$$\leq \frac{1}{2}OA.TV + R.BT - R.2\sqrt{TE.FV} = \frac{1}{2}OA.TV + R.BT - R.TV \text{ ko đổi}$$

 Vậy $\max S_{AEF} = \frac{1}{2}OA.TV + R.BT - R.TV$ đạt được khi D là giao OA và (O) .

0,25

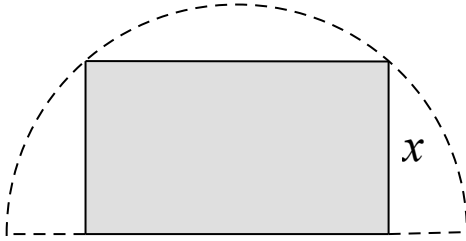
Bài V
(0,5 đ)

Cần cắt bỏ phần tôn với tổng diện tích bao nhiêu mét vuông?

0,5

Miếng tôn có bán kính 1 mét.

0,25

	 Biểu diễn diện tích phần tôn hình chữ nhật còn lại là $S = 2x\sqrt{1-x^2}$ (m²).	
	Ta có: $S = 2x\sqrt{1-x^2} \leq x^2 + (1-x^2) = 1$. Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (m). Như vậy, cần cắt bỏ phần tôn với tổng diện tích $\frac{\pi}{2} - 1$ (m²).	0,25